Die Einführung elliptischer Koordinaten bei den Spezialfällen der Komplexe zweiten Grades.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der K. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 4. Januar 1904

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Hans Tempel

aus Baiersdorf,

K. Reallehrer in Ingolstadt.

München 1904.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552302_0081

Die
Einführung elliptischer Koordinaten
bei den Spezialfällen
der Komplexe zweiten Grades.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der K. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 4. Januar 1904

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Hans Tempel

aus Baiersdorf,

K. Reallehrer in Ingolstadt.

München 1904.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Einleitung.

In seinem für die Liniengeometrie grundlegenden Werke[1]) hat Plücker die Komplexe zweiten Grades bereits eingehend behandelt und, trotzdem die Berücksichtigung der metrischen Verhältnisse und die unsymmetrische Schreibweise die Uebersichtlichkeit beeinträchtigten, schon die wichtige Rolle erkannt, welche die Singularitätenfläche für den einzelnen Komplex und für die Einteilung der Komplexe überhaupt spielt. Herr Klein führte zunächst in seiner Inauguraldissertation[2]) die zweckmässige Koordinatenbezeichnung ein: $p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$, $i \neq k = 1, 2, 3, 4$, wobei die y und z homogene Koordinaten der zwei die Gerade festlegenden Punkte sind, und dual $p_{ik} = q_{lm} = u_l v_m - u_m v_l$ (l und m sind die von i und k verschiedenen Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4), wobei u und v homogene Ebenenkoordinaten zweier Ebenen sind, die sich in der Geraden schneiden. Die Identität $p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} \equiv 0$ hebt die Gesamtheit der Linien des Raumes als eine 4 fache quadratische Mannigfaltigkeit aus einer 5 fachen Mannigfaltigkeit heraus, so dass die Liniengeometrie als die Geometrie einer Fläche zweiter Ordnung im 5-dimensionalen Raum erscheint. Demgemäss ersetzte Herr Klein[3]) ferner die p_{ik} durch die verallgemeinerten homogenen Linienkoordinaten x_i, $i = 1$ bis 6, und konnte nun durch Transformation ihrer Gleichung auf die kanonische Form

---

[1]) Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Leipzig 1868.

[2]) Bonn 1868; abgedruckt Math. Ann. 23, 1884.

[3]) S. die zitierte Inauguraldissertation und: „Zur Theorie der Linienkomplexe 1. und 2. Grades." Math. Ann. II, 1869.

mittels der Weierstrassschen Theorie der Elementarteiler eine erschöpfende Einteilung der Komplexe zweiten Grades geben. Die 48 Fälle nicht zerfallender Komplexe, die so zutage treten, hat Herr Weiler[1]) studiert und die Kongruenz der singulären Linien und die Singularitätenfläche jedesmal berechnet. Inzwischen aber hatte Herr Klein die Linienkoordinaten in Parameterform nach Art der elliptischen Koordinaten dargestellt,[2]) indem er statt des einzelnen Komplexes die ganze Schar mit der gleichen Singularitätenfläche betrachtete, und, gleichwie diese Methode für die Behandlung der Flächen zweiten Grades grosse Vorzüge aufweist, so gelang es in der Liniengeometrie, nicht nur die Frage nach den singulären Linien in einfachster Weise zu beantworten, sondern auch weitere, ins Gebiet der Differentialgeometrie einschlägige Aufgaben elegant zu lösen, doch mit Beschränkung auf den allgemeinen Fall der Komplexe zweiten Grades. Bei verwandten Problemen für die Flächen zweiten Grades, die von Herrn Lindemann[3]) bearbeitet sind, bieten sich im einzelnen eine Reihe interessanter Spezialfälle dar, die das Bild des allgemeinen Falles mit mehr oder weniger Abtönungen und Verschiebungen, zum Teil aber auch beträchtlich verzerrt, wiederspiegeln. Es ist nun die Aufgabe vorliegender Arbeit, ebenso auf dem Gebiete der Liniengeometrie die notwendigen Rechnungen durchzuführen und so die Kleinschen Betrachtungen auf die verschiedenen Arten der Komplexe zweiten Grades auszudehnen; dabei erscheinen als naturgemässe Richtpunkte einerseits Schlussfolgerungen aus dem allgemeinen Falle, anderseits die Weilersche Arbeit. An diese schliesse ich mich an in der Reihenfolge der Fälle und in der Wahl der Koordinaten, unter Beachtung der Verbesserungen und neuen

---

[1]) Weiler, „Ueber die verschiedenen Gattungen der Komplexe zweiten Grades." Math. Ann. VII, 1873.

[2]) Klein, „Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen." Math. Ann. V, 1872.

[3]) Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, II, 1, 1891, insbesondere Abschnitt XIV: Verallgemeinerung der elliptischen Koordinaten. — Krümmungskurven und geodätische Linien.

Gesichtspunkte, welche die Herren Hirst[1]) und Segre[2]) in ihren Untersuchungen spezieller quadratischer Komplexe angegeben haben. Die grosse Ausdehnung des Gegenstandes — sind es doch 48 Fälle nicht zerfallender Komplexe — erforderte eine Beschränkung auf die nächstliegenden Fragen; so musste ich auf die Diskussion der Kongruenzen singulärer Linien verzichten, obgleich die Darstellung mit elliptischen Koordinaten hier manche schöne Resultate verspricht, nach den Ergebnissen Segres zu schliessen, welche ich auf einfache Weise bestätigen konnte. Ferner glaubte ich eine eingehendere Diskussion der Singularitätenfläche unterlassen zu dürfen, wo die Weilersche Berechnung ihrer Gleichung zur erschöpfenden Behandlung genügt. Auch für die Integralflächen sind zumeist nur die Integralgleichungen angeschrieben; ich hoffe gelegentlich in einer späteren Arbeit die eine oder andere dieser Fragen noch näher beleuchten zu können. Dagegen hielt ich für vordringlich eine Deutung der benützten Hilfskomplexe und eine Darlegung ihres inneren Zusammenhanges mit der Singularitätenfläche. In einfachen Fällen, wo die Wege durch Segres und Hirsts Abhandlungen geebnet waren, habe ich auch die Konstruktion des Komplexes, d. h. seiner Komplexkegelschnitte oder dual seiner Komplexkegel vollständig angegeben.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit erhielt ich von Herrn Universitätsprofessor Dr. F. Lindemann. Es sei mir deshalb gestattet, ihm hierfür sowie für die wohlwollende Unterstützung während der Ausführung auch an dieser Stelle meinen tiefgefühlten Dank zum Ausdrucke zu bringen.

---

[1]) Hirst, „Note on the complexes generated by two correlative plans.“ Proceedings of the London Royal Society t. X, 1879.

[2]) Segre: „Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2e dégré double.“ Math. Ann. 23, 1884.

Grundlagen.

In der Geometrie der Flächen zweiten Grades sind konfokale Flächen, d. h. im verallgemeinerten Sinne eine lineare Flächenschar, zu der auch die „Fundamentalfläche“ gehört, bestimmt durch die Gleichung in Ebenenkoordinaten:

$$U + \lambda \Phi = 0,$$

wobei $U = 0$ eine beliebige Fläche zweiter Klasse und $\Phi = 0$ die Fundamentalfläche bedeutet. In Punktkoordinaten ist die Gleichung einer Fläche aus der Schar

$$F = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \cdots + \frac{x_4^2}{k_4 - \lambda} = 0.$$

Für einen bestimmten Punkt $x_1 \cdots x_4$ liefert diese Gleichung 3 Werte λ, d. h. es gehen durch jeden Punkt des Raumes 3 Flächen der Schar; die zugehörigen Werte λ_1, λ_2, λ_3 heissen die elliptischen Koordinaten des Punktes, der durch sie bis auf die Vorzeichen der x bestimmt ist, so dass die Punkte des Raumes zu je 8 gruppiert werden. Aus der Darstellung

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{k_3 - \lambda} + \frac{x_4^2}{k_4 - \lambda} = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \cdot \psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_3 - \lambda)(k_4 - \lambda)}$$

ergibt sich, am einfachsten durch Multiplikation mit $k_i - \lambda$, das man hernach $= 0$ setzt,

$$\sigma x_i^2 = \frac{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)(k_i - \lambda_3)}{(k_l - k_i)(k_m - k_i)(k_n - k_i)} \quad (l, m, n \neq i \text{ von } 1-4); \quad \sigma = \frac{1}{\psi}.$$

Das Problem der Krümmungslinien auf einer Fläche zweiter Ordnung $f = 0$ geht aus von der Differentialgleichung:[1])

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ df_1 & df_2 & df_3 & df_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Für die metrische Annahme, dass $\Phi = 0$ $(= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$ den unendlich fernen imaginären Kugelkreis vorstellt, sagt diese Gleichung aus, dass der Punkt x, sein unendlich benachbarter $x + dx$ und die bezüglich Φ genommenen Pole der in den Punkten x und $x + dx$ an die Fläche $f = 0$ gelegten Tangentialebenen in einer Ebene liegen, dass also die Normalen in x und $x + dx$ sich schneiden, was auf die bekannte Definition der Krümmungslinien zurückführt.

Die im Sinne der Nicht-Euklidischen Geometrie genommene Verallgemeinerung derselben ergab sich dadurch, dass für x_i allgemeine Punktkoordinaten und für $\Phi = 0$ eine beliebige Fläche zweiter Ordnung gesetzt wurden.

Die Differentialgleichung der verallgemeinerten „geodätischen Linien“

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

bedeutet, dass der Punkt x, seine unmittelbar benachbarten $x + dx$ und $x + 2dx + d^2x$ in einer Ebene mit dem Pol der Tangentialebene von x an $f = 0$ bezüglich $\Phi = 0$ liegen, oder, dass die Normale (Verbindungslinie der Punkte x und f) der Schmiegungsebene angehören soll, die bekannte Definition der geodätischen Linien.

Es ist für die zu gewinnende Analogie zweckmässig, die vorliegenden Gleichungen etwas anders zu deuten.

---

[1]) Vgl. Clebsch-Lindemann a. a. O.

Die x_i lassen sich auch auffassen als Ebenenkoordinaten der Polarebene von x bezüglich der Fundamentalfläche $\Phi = 0$, die wir uns in der Form $\Phi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ denken, $x_i + dx_i$ als Ebenenkoordinaten der Polarebene des Nachbarpunktes, f_i und df_i als Ebenenkoordinaten der Tangentialebenen an $f = 0$. Es bedeutet daher die Differentialgleichung (1), dass diese 4 Polarebenen der Punkte x und $x + dx$ sich in 1 Punkte schneiden.

Ebenso sagt die Differentialgleichung (2) der geodätischen Linien, dass die Polarebenen der 3 Punkte x, $x + dx$ und $x + 2\,dx + d^2x$ bezüglich $\Phi = 0$ und die Tangentialebene von x an $f = 0$ einen Punkt gemeinsam haben.

Diese Deutung der beiden Gleichungen ist stets möglich, welche kanonische Gleichungsform auch in den Spezialfällen auftreten mag; die Determinante, die der veränderten Auffassung entspricht, ist dieselbe, nur sind etwa die Vertikalreihen vertauscht.

Die Lösung der ersten Differentialgleichung ist $\lambda_1 = \text{const.}$, $\lambda_2 = \text{const.}$, die der zweiten liefert die geodätischen Linien für den allgemeinen Fall in der Form

$$\lambda_1 = \text{const.},$$

$$\Lambda_h = (k_1 - \lambda_h)\,(k_2 - \lambda_h)\,(k_3 - \lambda_h)\,(k_4 - \lambda_h),$$

$$\int \frac{d\lambda_2}{\sqrt{(A - \lambda_2) \cdot \Lambda_2}} + \int \frac{d\lambda_3}{\sqrt{(A - \lambda_3)\,\Lambda_3}} = C.$$

Wir wenden uns nun zur Betrachtung ähnlich gebauter Determinanten in der Liniengeometrie, zunächst auch für den allgemeinen Fall.

Hierfür ist nach Klein:

$J = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$ die Identität zwischen den Linienkoordinaten,

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{k_3 - \lambda} + \frac{x_4^2}{k_4 - \lambda} + \frac{x_5^2}{k_5 - \lambda} + \frac{x_6^2}{k_6 - \lambda} = 0 \quad \text{die}$$

Gleichung eines quadratischen Linienkomplexes der „konfokalen“ Schar und $\frac{x_1^2}{(k_1-\lambda)^2} + \cdots + \frac{x_6^2}{(k_6-\lambda)^2} = 0$ die Bedingung dafür, dass x eine singuläre Linie dieses Komplexes ist.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_6 \\ dx_1 & dx_2 & \cdots & dx_6 \\ \frac{x_1}{k_1-\lambda} & \frac{x_2}{k_2-\lambda} & \cdots & \frac{x_6}{k_6-\lambda} \\ \frac{dx_1}{k_1-\lambda} & \frac{dx_2}{k_2-\lambda} & \cdots & \frac{dx_6}{k_6-\lambda} \\ \frac{x_1}{(k_1-\lambda)^2} & \frac{x_2}{(k_2-\lambda)^2} & \cdots & \frac{x_6}{(k_6-\lambda)^2} \\ \frac{dx_1}{(k_1-\lambda)^2} & \frac{dx_2}{(k^2-\lambda)^2} & \cdots & \frac{dx_6}{(k_6-\lambda)^2} \end{vmatrix} = 0$$

fordert, dass folgende 6 Gebilde:

1. der Komplex der Treffgeraden von x, diese Gerade selbst eingeschlossen,

2. der Komplex der Treffgeraden von $x + dx$,

3. der Tangentialkomplex von x bezüglich des Komplexes $\sum_1^6{}^i \frac{x_i^2}{k_i-\lambda} = 0$,

4. der Tangentialkomplex von $x + dx$ bezüglich desselben Komplexes,

5. der Tangentialkomplex von x bezüglich des Komplexes $\sum_1^6{}^i \frac{x_i^2}{(k_i-\lambda)^2} = 0$, der mit $\sum_1^6{}^i \frac{x_i^2}{k_i-\lambda} = 0$ zusammen die singulären Linien des letzteren Komplexes bestimmt, und

6. der Tangentialkomplex von $x + dx$ bezüglich $\sum_1^6{}^i \frac{x_i^2}{(k_i-\lambda)^2} = 0$,

eine Gerade gemein haben sollen, oder dass die Gleichungen

$$\sum x_i x_i' = 0,\ \sum x_i' dx_i = 0,\ \sum \frac{x_i x_i'}{k_i-\lambda} = 0,\ \sum \frac{x_i' dx_i}{k_i-\lambda} = 0,$$

$$\sum \frac{x_i x_i'}{(k_i-\lambda)^2} = 0 \text{ und } \sum \frac{x_i' dx_i}{(k_i-\lambda)^2} = 0$$

gleichzeitig erfüllt seien; sie sind es und zwar durch x_i selbst, sobald die Geraden x und $x + dx$ den beiden Komplexen $\Sigma \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0$ und $\Sigma \frac{x_i^2}{(k_i - \lambda)^2} = 0$ angehören.

Es sind also in der Tat die singulären Linien herausgehoben, aber nicht sie allein; auch für Gerade, die nebst ihren benachbarten den 2 Komplexen $\Sigma \frac{x_i^2}{k_i - \lambda_1} = 0$ und $\Sigma \frac{x_i^2}{k_i - \lambda_2} = 0$ gleichzeitig angehören, verschwindet die Determinante. Multiplizieren wir nämlich die Vertikalreihen mit $\frac{x_i (k_i - \lambda_1)}{k_i - \lambda_2}$ und addieren alle zur ersten, so wird deren 1. Glied:

$$\sum_1^{6i} \frac{x_i^2 (k_i - \lambda_1)}{k_i - \lambda_2} = \sum_1^{6i} \frac{x_i^2 ((k_i - \lambda_2) + (\lambda_2 - \lambda_1))}{k_i - \lambda_2}$$

$$= \sum_1^{6i} x_i^2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \sum_1^{6i} \frac{x_i^2}{k_i - \lambda_2} = 0,$$

das 2. Glied wird ebenso:

$$\sum_1^{6i} \frac{x_i \, dx_i \, (k_i - \lambda_1)}{k_i - \lambda_2} = \sum_1^{6i} x_i \, dx_i - (\lambda_1 - \lambda_2) \sum_1^{6i} \frac{x_i \, dx_i}{k_i - \lambda_2} = 0,$$

das 3. wird $\Sigma \frac{x_i^2}{(k_i - \lambda_2)} = 0$, ferner das 4. $\Sigma \frac{x_i \, dx_i}{k_i - \lambda_2} = 0$,

das 5. $\Sigma \frac{x_i^2}{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\Sigma \frac{x_i^2}{k_i - \lambda_1} - \Sigma \frac{x_i^2}{k_i - \lambda_2} \right) = 0$

und das letzte:

$$\Sigma \frac{x_i \, dx_i}{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\Sigma \frac{x_i \, dx_i}{k_i - \lambda_1} - \Sigma \frac{x_i \, dx_i}{k_i - \lambda_2} \right) = 0.$$

Das Nullwerden der Determinante ist somit der Ausdruck dafür, dass eine Gerade und ihre Nachbargerade 2 Komplexen der konfokalen Schar angehört, oder, dass sie insbesondere 2 unendlich benachbarten Komplexen λ_1 und $\lambda_1 + d\lambda_1$ gemeinsam, d. h. eine singuläre Gerade des Komplexes λ_1 ist.

Es sei bemerkt, dass dieser Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ für den 3-dimensionalen Raum keine weitere Bedeutung hat, als dass zugleich $\lambda_1 = \lambda_2 = k_i$ ist, der Punkt also auf einer ausgearteten Fläche, etwa der Fokalellipse, liegt; denn für die konfokalen Flächen λ, die durch einen reellen Punkt des Raumes gehen, gilt die Relation $\lambda_1 > k_1 > \lambda_2 > k_2 > \lambda_3$, während in der Liniengeometrie auf für reelle Gerade die Parameterwerte λ nicht durch die Grössen k getrennt sind.

In Analogie zur Differentialgleichung der geodätischen Linien auf Flächen zweiter Ordnung betrachten wir in der Liniengeometrie die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_6 \\ dx_1 & dx_2 & \cdots & dx_6 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & \cdots & d^2x_6 \\ \frac{x_1}{k_1-\lambda} & \frac{x_2}{k_2-\lambda} & \cdots & \frac{x_6}{k_6-\lambda} \\ \frac{dx_1}{k_1-\lambda} & \frac{dx_2}{k_2-\lambda} & \cdots & \frac{dx_6}{k_6-\lambda} \\ \frac{d^2x_1}{k_1-\lambda} & \frac{d^2x_2}{k_2-\lambda} & \cdots & \frac{d^2x_6}{k_6-\lambda} \end{vmatrix};$$

ihr Quadrat hat in der ersten Reihe die Glieder:

$$\sum x_i^2,\ \sum x_i\,dx_i,\ \sum x_i\,d^2x_i,\ \sum' \frac{x_i^2}{k_i-\lambda},\ \sum' \frac{x_i\,dx_i}{k_i-\lambda},\ \sum' \frac{x_i\,d^2x_i}{k_i-\lambda}.$$

Hievon sind die ersten beiden null, weil x und $x + dx$ Gerade sind, die drei letzten, weil x dem Komplex λ angehört, die Nachbargeraden also dem Tangentialkomplex, die Determinante verschwindet somit dann und nur dann, wenn $\sum' x_i\,d^2x_i = 0$ wird, d. h. die Bedingung des Schneidens unendlich benachbarter Geraden erfüllt ist.

Solche Gerade ordnen sich zu Umhüllungskurven und Developpablen zusammen, und aus ihnen leiten sich die Integralflächen ab, deren Gleichung im allgemeinen Falle lautet:

$$W = \int d\lambda_1 \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_1)(k_5 - \lambda_1)(k_6 - \lambda_1)}}$$

$+$ (3 analog gebaute Integrale mit λ_2, λ_3 und λ_4) $+ C = 0$.[1])

So lässt sich hier in gewissem Sinne von einer Analogie zwischen Raumgeometrie und Liniengeometrie sprechen; Determinanten ähnlicher Form geben einerseits in der Raumgeometrie Krümmungskurven, hier Kongruenzen, welche je zwei Komplexe der Schar gemein haben, insbesondere die Kongruenz der singulären Linien, anderseits dort die geodätischen Linien, hier Umhüllungskurven und Integralflächen. Für die einzelnen Fälle bleiben wir bei der einfachen Herleitung nach Kleins Methode.

Betreffs der Singularitätenfläche sei noch eine Bemerkung Kleins in der erwähnten Arbeit, Math. Ann. II, Nr. 19, näher ausgeführt.

Die zu einer beliebigen Geraden gehörigen 4 Durchschnittspunkte seien 1, 2, 3, 4, die 4 Tangentialebenen I, II, III, IV; man kann Punkte und Ebenen auf 4 Arten zuordnen, so dass das Doppelverhältnis der 4 Elemente beidemal dasselbe ist; ist eine Zuordnung zu 1, 2, 3, 4 die Folge I, II, III, IV, so sind die anderen II, I, IV, III, III, IV, I, II und IV, III, II, I. Jede Zuordnung, z. B. die erste, bestimmt einen Komplex λ der Schar, dem die Gerade angehört, singuläre Linie ist die Verbindungslinie von Punkt 1 mit dem Berührungspunkt der zugeordneten Ebene I, der Komplexkegel von 1 zerfällt in zwei Ebenen, die sich in der singulären Geraden schneiden, und deren eine I ist, weil dieselbe Tangentialebene der Singularitätenfläche, aber nicht die zugehörige singuläre Ebene ist. Die Zuordnung von Punkt und Tangentialebene erfolgt also durch die Komplexe λ oder auch durch deren Tangentialkomplexe in g; es wird somit ein Zusammenhang zwischen den λ und der Natur der Singularitätenfläche auch in den Einzelfällen bestehen.

Den von Herrn Klein erschöpfend behandelten „allgemeinen“ Fall [111111] besprechen wir nicht weiter, wenden uns vielmehr sofort zu den einzelnen Fällen, wo die k_i nicht sämtlich voneinander verschieden sind.

[1]) Vgl. Klein, die zitierte Abhandlung, Math. Ann. V.

I. Kanonische Form [111111].

1111(11)] 1. Im Falle 1, der nach der Theorie der Elementarteiler durch das Schema [1111(11)] gekennzeichnet ist, lautet die Identität wie im allgemeinen Falle:

$$J = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0,$$

die Komplexgleichung ist:

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{k_3 - \lambda} + \frac{x_4^2}{k_4 - \lambda} + \frac{x_5^2 + x_6^2}{k_5 - \lambda} = 0,$$

derjenige Komplex, der mit $\varphi = 0$ die singulären Linien bestimmt oder die Diskriminante von φ ist:

$$\chi = \frac{x_1^2}{(k_1 - \lambda)^2} + \cdots + \frac{x_5^2 + x_6^2}{(k_5 - \lambda)^2} = 0.$$

Eine beliebige Gerade des Raumes gehört 3 Komplexen λ der konfokalen Schar an, da $\varphi = 0$ als Gleichung in λ vom dritten Grade ist, nachdem sich das Glied mit λ^4 wegen der Identität weggehoben hat.

Demgemäss lässt sich schreiben:

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \ldots + \frac{x_5^2 + x_6^2}{k_5 - \lambda} = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_3 - \lambda)(k_4 - \lambda)(k_5 - \lambda)} = 0,$$

und hieraus folgt die Parameterdarstellung der Koordinaten x:

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)(k_1 - \lambda_3)}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_4 - k_1)(k_5 - k_1)},$$

$$\sigma x_2^2 = \frac{(k_2 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)(k_2 - \lambda_3)}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)(k_4 - k_2)(k_5 - k_2)}, \ldots$$

$$\sigma (x_5^2 + x_6^2) = \frac{(k_5 - \lambda_1)(k_5 - \lambda_2)(k_5 - \lambda_3)}{(k_1 - k_5)(k_2 - k_5)(k_3 - k_5)(k_4 - k_5)},$$

$$\sigma = \frac{1}{\psi}$$

Durch die 3 Parameter λ, d. h. durch die 3 Komplexe der Schar ist jedoch nicht eine Gerade bestimmt, sondern ∞^1 Gerade, gleichwie auch bei den Rotationsflächen zweiter Ordnung, die den entsprechenden Fall [11(11)] der Raumgeometrie bilden, r und z die ∞^1 Punkte eines Parallelkreises geben.

Die einzelne Gerade kann hier, wie dort der Punkt durch eine Ebene, durch einen linearen Komplex festgelegt werden, der sich schreiben lässt $x_5 = \lambda_4 x_6$ oder, was wir der einfacheren Rechnung wegen vorziehen:

$$x_5 = r \cos \vartheta, \quad x_6 = r \sin \vartheta;$$

dabei ist

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{x_6}{x_5}, \quad \sigma r^2 = \sigma (x_5^2 + x_6^2) = \frac{(k_5 - \lambda_1)(k_5 - \lambda_2)(k_5 - \lambda_3)}{(k_1 - k_5) \ldots (k_4 - k_5)}.$$

Wie im Raum die zu Hilfe genommene Meridianebene senkrecht steht zu den beiden konfokalen Rotationsflächen, die durch denselben Punkt gehen, so ist hier der neue Komplex involutorisch zu jedem Tangentialkomplex. Die erforderliche Bedingung: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_6 b_6 = 0$ ist in der Tat erfüllt für

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, \; a_5 = \operatorname{tg} \vartheta, \; a_6 = -1 \text{ und}$$

$$b_1 = \frac{x_1}{k_1 - \lambda}, \; b_2 = \frac{x_2}{k_2 - \lambda}, \; \ldots, \; b_5 = \frac{x_5}{k_5 - \lambda}, \; b_6 = \frac{x_6}{k_5 - \lambda}.$$

Die Doppelgeraden, deren nach Weiler zur Verbindung zweier einfacher Elementarteiler immer zwei gehören, ergeben sich in unserer Darstellung einfach als Gerade, die allen Komplexen der Schar gleichzeitig angehören, wenn für die fraglichen Geraden die nicht verschwindenden Koordinaten, deren es hier zwei, bei speziellen Fundamentalkomplexen eine gibt, nur in einer einzigen Verbindung auftreten.[1])

---

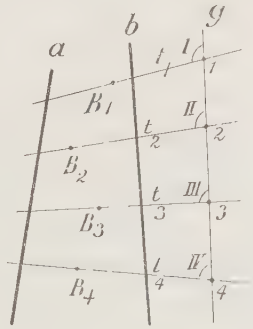
[1]) Dieser Satz lässt sich durch Zurückgehen auf die Koordinaten $p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$, wo unter y variable, unter z feste Punktkoordinaten zu verstehen sind, folgendermassen beweisen: Kommt z. B. x_5 und x_6 nur in der Verbindung $x_5^2 + x_6^2$ vor und bestimmen wir die Koordinaten so, dass dies gleich $p_{12} \cdot p_{34}$ ist, so sind $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ und $y_3 = 0$, $y_4 = 0$

Hier sind daher die Doppelgeraden: 0, 0, 0, 0, 1, i und 0, 0, 0, 0, 1, $-i$, zwei windschiefe Gerade. Wie durch jeden Punkt des Raumes, so geht durch einen beliebigen Punkt der Singularitätenfläche eine Treffgerade dieser „Direktrizen", sie liegt ganz in der Fläche, da sie dieselbe in dem angenommenen Punkte und in 2 doppelt zählenden Punkten der Direktrizen, also in 5 Punkten, trifft. Wir betrachten nun eine bestimmte, allgemein liegende Gerade g, welche die Singularitätenfläche schneidet. Der lineare Komplex ϑ, dem g angehört, ordnet jedem Punkte P der Geraden die Ebene zu, welche durch g und die Treffgerade geht, die P nach den Direktrizen schickt; denn ϑ ist aus der Komplexschar $x_5 - \lambda x_6 = 0$, deren spezielle Komplexe die Direktrizen zu Leitgeraden haben, enthält also die Kongruenz ihrer Treffgeraden. Sobald ferner der Punkt P auf der Singularitätenfläche liegt, seine Treffgerade t also eine Gerade der Fläche ist, wird $(g\,t)$ zur Tangentialebene. Der Komplex ϑ ordnet somit Punkte und Ebenen der Singularitätenfläche einander zu.

So löst sich der Widerspruch zwischen Ordnungs- und Klassenzahl der Singularitätenfläche und dem Umstande, dass nur 3 Komplexe der konfokalen Schar eine gegebene Gerade enthalten.

Die Verhältnisse liegen, wie folgende Zeichnung ersehen lässt.

1 2 3 4 seien die Durchschnittspunkte der Geraden g mit der Singularitätenfläche, $t_1\ t_2\ t_3\ t_4$ die von diesen Punkten ausgehenden Treffgeraden der Direktrizen a und b, $(g\,t_1) \equiv$ I u. s. f. sind dann die 4 Tangentialebenen mit den Berührungspunkten $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$.



Die Zuordnung $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{matrix}$ ist durch den linearen Kom-

die Doppelgeraden. Da wir nun mittels der Identität das Glied mit $x_5^2 + x_6^2$ wegheben können, so bleiben in der Gleichung des Komplex-

plex ϑ gegeben, während 1 2 3 4 mit II I IV III oder III IV I II oder IV III II I durch die 3 quadratischen Komplexe λ zugeordnet erscheint; bei dem ersten derselben ist 1 B_2 die 1 zugehörige singuläre Linie.

Wie im allgemeinen Falle charakterisiert $\lambda_1 = \lambda_2$ die singuläre Linie; auch hier müssen für sie 2 Komplexe, 2 Punkte und 2 Tangentialebenen zusammenfallen. $\lambda_1 = \lambda_2$ beliebig, $\lambda_3 = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$ gibt den ebenen Strahlenbüschel aller Tangenten in einem bestimmten Punkte, so dass λ_3 und ϑ als Koordinaten des Punktes auf der Singularitätenfläche erscheinen.

Um die mit dem Komplex verknüpfte Differentialgleichung zu erhalten, differenzieren wir logarithmisch σx_i^2:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{d\lambda_1}{k_1-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_1-\lambda_2} - \frac{d\lambda_3}{k_1-\lambda_3} \text{ u. s. f.,}$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_5}{x_5} = -\frac{d\lambda_1}{k_5-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_5-\lambda_2} - \frac{d\lambda_3}{k_5-\lambda_3} - 2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,d\vartheta,$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_6}{x_6} = -\frac{d\lambda_1}{k_5-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_5-\lambda_2} - \frac{d\lambda_3}{k_5-\lambda_3} + 2\,\mathrm{ctg}\,\vartheta\,d\vartheta.$$

Durch Multiplizieren mit x_i, Quadrieren und Addieren entsteht:

$$\left(\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^2 \cdot \sum x_i^2 + 4\frac{d\sigma}{\sigma}\sum x_i\,dx_i + 4\sum dx_i^2 = M_1\,d\lambda_1^2 + M_2\,d\lambda_2^2 + M_3\,d\lambda_3^2 + M_4\,d\lambda_4^2.$$

Es fällt nämlich z. B. das Glied mit $d\lambda_1 \cdot d\lambda_2$ fort:

$$\frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)} + \cdots + \frac{x_5^2+x_6^2}{(k_5-\lambda_1)(k_5-\lambda_2)} = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)}(\varphi(\lambda_1)-\varphi(\lambda_2)) = 0,$$

weil x den beiden Komplexen λ_1 und λ_2 angehört; auch das Glied mit $d\lambda_1 \cdot d\vartheta$ hebt sich weg:

kegels von einem Punkt der Doppelgeraden $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ nur quadratische Glieder in y_1 und y_2; dieser Kegel wird $a\,y_1^2 + 2\,b\,y_1\,y_2 + c\,y_2^2 = 0$, zerfällt also in 2 Ebenen, die sich in der Doppelgeraden schneiden. Letztere gehört somit jedem beliebigen Komplexe λ doppelt an.

$$\frac{4\,d\lambda_1\,d\vartheta}{k_5-\lambda_1}(x_5^2\operatorname{tg}\vartheta - x_6^2\operatorname{ctg}\vartheta)$$

$$= \frac{4\,d\lambda_1\,d\vartheta}{k_5-\lambda_1} r^2(\sin\vartheta\cos\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta) = 0.$$

Die Koeffizienten der Quadrate werden:

$$M_1 = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)^2} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda_1)^2} + \cdots + \frac{x_5^2+x_6^2}{(k_5-\lambda_1)^2} = \chi(\lambda_1),$$

oder da

$$\varphi = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_3-\lambda)(k_4-\lambda)(k_5-\lambda)}$$

ist, wird der Differentialquotient nach Einsetzung von $\lambda = \lambda_1$:

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda_1)\cdots(k_5-\lambda_1)};\ \text{ebenso}$$

$$M_2 = \chi(\lambda_2) = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda_2)\cdots(k_5-\lambda_2)}\ \text{und}$$

$$M_3 = \chi(\lambda_3) = \frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda_3)\cdots(k_3-\lambda_2)}.$$

$$M_4 = 4(x_5^2\operatorname{tg}^2\vartheta + x_6^2\operatorname{ctg}^2\vartheta) = 4r^2$$

$$= 4\frac{(k_5-\lambda_1)(k_5-\lambda_2)(k_5-\lambda_3)\psi}{(k_1-k_5)\cdots(k_4-k_5)}.$$

Es ist daher, da $\sum x_i^2$ und $\sum x_i\,dx_i$ verschwinden,

$$\sigma\cdot 4(dx_1^2 + \cdots\cdot dx_6^2)$$

$$= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(k_1-\lambda_1)\cdots(k_5-\lambda_1)} d\lambda_1^2 + \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(k_1-\lambda_2)\cdots(k_5-\lambda_2)} d\lambda_2^2$$

$$+ \frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(k_1-\lambda_3)\cdots(k_5-\lambda_3)} d\lambda_3^2 + 4r^2\,d\vartheta^2.$$

Die Umhüllungskurven der Kongruenz $\lambda_1 = \text{const.}$, $\lambda_2 = \text{const.}$ haben zur Differentialgleichung:

$$\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(k_1-\lambda_3)\cdots(k_5-\lambda_3)} d\lambda_3^2 + 4r^2\,d\vartheta^2 = 0,$$

die Umhüllungskurven der singulären Linien des bestimmten Komplexes λ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$:

$$\frac{(\lambda_3 - \lambda)^2}{(k_1 - \lambda_3) \cdots (k_5 - \lambda_3)} d\lambda_3^2 + 4 r^2 d\vartheta^2 = 0.$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ gibt $\vartheta = \text{const.}$ als Haupttangentenkurven der Singularitätenfläche.[1])

$\lambda_1 = \lambda_2 = k_5$ macht r zu Null; dadurch reduziert sich die Differentialgleichung auf $d\lambda_3 = 0$; $\lambda_3 = \text{const.}$ und ϑ beliebig charakterisiert daher im Vereine mit $\lambda_1 = \lambda_2 = k_5$ die Geraden der Fläche, welche beide Doppelgerade schneiden.

$\lambda_1 = k_5$ ist der zerfallende quadratische Komplex, dessen Linien entweder die eine oder die andere Doppelgerade treffen. Die Geraden der Fläche erscheinen somit als die singulären Geraden dieses Komplexes.[2])

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k_5$ sind die 8 Erzeugenden, welche in je einer Kuspidalebene durch den zugehörigen Kuspidalpunkt gehen.

Die partielle Differentialgleichung für spezielle Komplexe wird für die vorliegende Koordinatenbestimmung von Geraden:

$$\sum_1^6 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 = 0 = \frac{1}{M_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{1}{M_2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \frac{1}{M_3}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2 + \frac{1}{M_4}\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 \cdot \frac{(k_1-\lambda_1)\cdots(k_4-\lambda_1)\,(k_5-\lambda_1)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(k_5-\lambda_1)}$$

$$+ \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 \cdot \frac{(k_1-k_5)\cdots(k_4-k_5)}{4\,(k_5-\lambda_1)\,(k_5-\lambda_2)\,(k_5-\lambda_3)}.$$

[1]) Cf. Lie, „Ueber Komplexe, insb. Linien- und Kugelkomplexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen", Math. Ann. V, p. 179 Fussnote: „Jede Regelfläche, deren Linien zwei feste Gerade schneiden, enthält einfach unendlich viele algebraische Haupttangentenkurven, unter denen jede von den Geraden eines linearen Komplexes umhüllt wird."

[2]) Wenn daher Weiler sagt, unter den Erzeugenden der Fläche gebe es keine singulären Linien, so hat er damit nur für allgemeine Komplexe der Schar und sonach für seinen Fall Recht, da er aus der konfokalen Schar den Komplex herausgreift, der hier $\lambda = 0$ entspräche.

Diese Gleichung sei verglichen mit der aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} (\lambda_1-a)(\lambda_1-b) & (\lambda_2-a)(\lambda_2-b) & (\lambda_3-a)(\lambda_3-b) & (k_5-a)(k_5-b) \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & k_5^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & k_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

fliessenden identischen Relation:

$$\frac{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(k_5-\lambda_1)} + \frac{(\lambda_2-a)(\lambda_2-b)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(k_5-\lambda_2)}$$

$$+ \frac{(\lambda_3-a)(\lambda_3-b)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(k_5-\lambda_3)} - \frac{(k_5-a)(k_5-b)}{(k_5-\lambda_1)(k_5-\lambda_2)(k_5-\lambda_3)} \equiv 0.$$

Demgemäss setzen wir

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 (k_1-\lambda_1)\cdots(k_5-\lambda_1)^2 = (\lambda_1-a)(\lambda_1-b) \text{ u. s. f.},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 \cdot \frac{(k_1-k_5)\cdots(k_4-k_5)}{4} = -(k_5-a)(k_5-b)$$

und erhalten als Gleichung der Integralfläche:

$$W = \int \varphi_1 \, d\lambda_1 + \int \varphi_2 \, d\lambda_2 + \int \varphi_3 \, d\lambda_3$$

$$+ \frac{2\sqrt{-(k_5-a)(k_5-b)}}{\sqrt{(k_1-k_5)(k_2-k_5)(k_3-k_5)(k_4-k_5)}}\,\vartheta + c = 0, \text{ wo}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{k_5-\lambda_i} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}{(k_1-\lambda_i)(k_2-\lambda_i)(k_3-\lambda_i)(k_4-\lambda_i)}}.$$

Wie im allgemeinen Falle stellt diese Gleichung ∞^3 spezielle Komplexe oder Flächen vor, welche, als gemeinsame Integrale je zweier Komplexe $\lambda = a$ und $\lambda = b$, mit jedem der beiden eine spezielle Kongruenz gemein haben, so dass jedem ein System Haupttangenten angehört.

2. [111(111)] **2.** Im Falle 2 oder [111(111)] eignet eine beliebige Raumgerade nur zwei Komplexen der Schar; wir können nämlich schreiben:

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_4^2+x_5^2+x_6^2}{k_4-\lambda} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\,\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_3-\lambda)(k_4-\lambda)},$$

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_4-k_1)}, \text{ ebenso } \sigma x_2^2 \text{ u. } \sigma x_3^2,$$

$$\sigma(x_4^2+x_5^2+x_6^2) = \frac{(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)}{(k_4-k_1)(k_4-k_2)(k_4-k_3)} = \sigma r^2.$$

Doppelgerade, die jedem Komplexe der konfokalen Schar angehören, sind hier $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, d. h. die „Erzeugenden" der Fläche zweiten Grades, welche doppelt zählend die Singularitätenfläche bildet. $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ sind die Geraden der anderen Schar, sie seien mit Segre „Direktrizen" genannt.

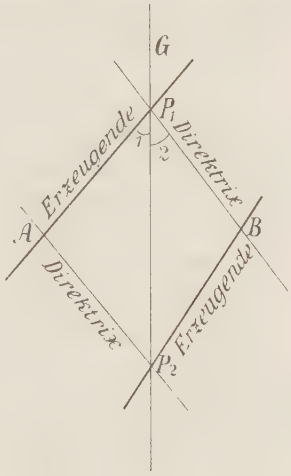
Um ein involutorisches System von Hilfskomplexen einzuführen, wählen wir, analog den räumlichen Polarkoordinaten, die Substitution:

$$x_4 = r\cos\vartheta,\ x_5 = r\sin\vartheta\cos\zeta,\ x_6 = r\sin\vartheta\sin\zeta.$$

Der Komplex ζ oder $x_5\,\mathrm{tg}\,\zeta - x_6 = 0$ ist von gleicher Art wie im Falle 1, der Komplex ϑ oder $x_4^2\,\mathrm{tg}^2\vartheta - (x_5^2+x_6^2) = 0$ ist jener einfache quadratische Komplex der Gattung 4 oder [1(11)(111)], dessen Kegelschnitte die Fläche zweiter Ordnung in den Punkten zweier fester Erzeugenden, nämlich der Leitgeraden der Kongruenz $x_5 = 0, x_6 = 0$, berühren. Jede Gerade wird in der Tat einen der ∞^1 derartigen Komplexe ϑ bestimmen, und dieser liegt involutorisch zu den anderen Komplexen λ_1, λ_2 und ϑ, welche die Gerade enthalten.

Die Zuordnung der Punkte und Tangentialebenen einer gegebenen Geraden g sei an der Hand nebenstehender Figur entwickelt. Schneidet g die Fläche in P_1 und P_2 und sind $P_1 A$ und $P_2 B$ die dadurch bestimmten „Erzeugenden", $P_1 B$

und $P_2 A$ die „Direktrizen“, so sind $P_1 A P_2 = 1$ und $P_1 B P_2 = 2$ die Tangentialebenen von g an die Fläche. Da nun der Komplexkegel in jedem Punkte der Fläche in zwei Ebenen mit der betreffenden „Erzeugenden“ als Schnittlinie zerfällt, so weisen beide λ den Punkten P_1 und P_2 bezüglich die Ebenen 1 und 2 zu; ϑ und ζ hingegen ordnen dem Punkte P_1 die Ebene 2 zu und dem P_2 die Ebene 1. ζ enthält nämlich als Individuum des Büschels mit der Kongruenz $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ die Direktrix $P_1 B$; und da diese auf der Fläche liegt und die zwei festen Erzeugenden schneidet, die in Ebene 2 gelegenen Tangenten der Fläche in den Schnittpunkten also mit $P_1 B$ zusammenfallen, so gehört Ebene 2 zu dem Punkte P_1 auch in dem Komplexe ϑ.



$\lambda_1 = \lambda_2$ gibt eine singuläre Gerade, welche jedoch in diesem Falle die Singularitätenfläche nicht berührt. Von der in 4 lineare Kongruenzen zerfallenen Kongruenz [4, 4] der singulären Geraden sind die von Segre gefundenen Direktrizen, welche Träger der singulären Punkte und Ebenen sind, gegeben durch $\lambda_1 = \lambda_2 = k_4$. Um die Segreschen Koordinaten für unsere Bezeichnungsweise anwenden zu können, müssen wir den Komplex λ schreiben:

$$\varphi - \frac{J}{k_4 - \lambda} = -\frac{1}{k_4 - \lambda}\left(\frac{x_1^2(k_1 - k_4)}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2(k_2 - k_4)}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2(k_3 - k_4)}{k_3 - \lambda}\right) = 0;$$

wir haben also bei den Indizes der x statt 4, 5, 6 die Ziffern 1, 2, 3 zu setzen und

$$\lambda_4 \sim \frac{k_1 - k_4}{k_1 - \lambda},\ \lambda_5 \sim \frac{k_2 - k_4}{k_2 - \lambda},\ \lambda_6 \sim \frac{k_3 - k_4}{k_3 - \lambda}$$

zu substituieren, so bekommen wir für die Direktrizen:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \sqrt{\frac{k_1 - k_4}{k_1 - \lambda}\left(\frac{k_2 - k_4}{k_2 - \lambda} - \frac{k_3 - k_4}{k_3 - \lambda}\right)}$$

$$: \sqrt{\frac{k_2 - k_4}{k_2 - \lambda}\left(\frac{k_3 - k_4}{k_3 - \lambda} - \frac{k_1 - k_4}{k_1 - \lambda}\right)} : \sqrt{\frac{k_3 - k_4}{k_3 - \lambda}\left(\frac{k_1 - k_4}{k_1 - \lambda} - \frac{k_2 - k_4}{k_2 - \lambda}\right)}$$

$$= \sqrt{(k_1 - k_4)(k_2 - k_3)} : \sqrt{(k_2 - k_4)(k_3 - k_1)} : \sqrt{(k_3 - k_4)(k_1 - k_2)},$$

$$x_4' = x_5' = x_6' = 0$$

in Uebereinstimmung mit den Werten obiger Parameterdarstellung für $\lambda_1 = \lambda_2 = k_4$

$$\sigma' x_1'^2 = -\frac{k_1 - k_4}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)}, \quad \sigma' x_2'^2 = -\frac{k_2 - k_4}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)},$$

$$\sigma' x_3'^2 = -\frac{k_3 - k_4}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}, \quad x_4' = x_5' = x_6' = 0.$$

Diese 4 Linien r — sie seien im folgenden stets „singuläre Direktrizen“ genannt — werden von allen singulären Linien eines beliebigen Komplexes λ getroffen, wie folgende Rechnung zeigt. Die allgemeinen singulären Linien sind ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$):

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1 - \lambda)^2}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_4 - k_1)}, \cdots x_4 = r \cos \vartheta, \cdots$$

und es ist:

$$\sqrt{\sigma \sigma'} \cdot (x_1 x_1' + \cdots x_6 x_6') = \frac{k_1 - \lambda}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} + \frac{k_2 - \lambda}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)}$$

$$+ \frac{k_3 - \lambda}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} = 0;$$

dabei waren alle Vorzeichen positiv genommen; wie sie aber auch bei einer singulären Geraden sein mögen, immer wird diese eine der 4 singulären Direktrizen schneiden. Die anderen 4 Leitgeraden der Kongruenz singulärer Linien sind, da für sie in gleicher Weise die Bedingung des Schneidens erfüllt ist,

$$\varrho x_1'' = \sqrt{\lambda_4 (\lambda_5 - \lambda_6) \cdot (\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6)}$$

$$= \sqrt{(k_1 - k_4)(k_2 - k_3)} \left[\lambda^2 (k_1 - k_2 - k_3 + k_4) + 2\lambda (k_2 k_3 - k_1 k_4)\right.$$

$$\left. + k_1 k_4 (k_2 + k_3) - k_2 k_3 (k_1 + k_4)\right],$$

$\varrho\, x_2''$ und $\varrho\, x_3''$ folgen durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3, $x_4'' = x_5'' = x_6'' = 0$. Von den Leitgeraden der 4 linearen Kongruenzen sind somit die 4 Direktrizen r für alle Komplexe die nämlichen, die r' dagegen, als von λ abhängig, wechseln mit den Komplexen; Segres Abbildung auf eine Schar Kurven zweiter Klasse macht dies anschaulich.

Die Konstruktion der beiden durch eine Gerade gehenden quadratischen Komplexe ist analog der Aufgabe, durch 4 Punkte einen Kegelschnitt zu legen, der eine Gerade berührt; diese Aufgabe besitzt bekanntlich i. A. 2 Lösungen und nur dann eine einzige, wenn ein Punkt auf der Geraden liegt. Hier bestimmt die gegebene Linie zwei Direktrizen und damit eine lineare Kongruenz; man hat nun quadratische Komplexe zu suchen, welche diese Kongruenz enthalten und die speziellen Komplexe der 4 singulären Direktrizen als Tangentialkomplexe haben, und findet im allgemeinen zwei Lösungen: der Komplexkegelschnitt in einer beliebigen Ebene läuft durch die Schnittpunkte der singulären Direktrizen und berührt die Gerade der Kongruenz. Schneidet die gegebene Gerade eine singuläre Direktrix, dann fallen die zwei möglichen Komplexe zusammen: $\lambda_1 = \lambda_2$; die Komplexkegel im Schnittpunkte für die Komplexe ϑ und ζ legen die Gerade fest und es charakterisiert so ϑ und ζ den anderen Schnittpunkt mit der Fläche.

Um die mit dem Komplex verbundene Differentialgleichung zu lösen, bilden wir:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{d\lambda_1}{k_1-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_1-\lambda_2},$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_4}{x_4} = -\frac{d\lambda_1}{k_4-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_4-\lambda_2} - 2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_5}{x_5} = -\frac{d\lambda_1}{k_4-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_4-\lambda_2} + 2\,\mathrm{ctg}\,\vartheta\, d\vartheta - 2\,\mathrm{tg}\,\zeta\, d\zeta,$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_6}{x_6} = -\frac{d\lambda_1}{k_4-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_4-\lambda_2} + 2\,\mathrm{ctg}\,\vartheta\, d\vartheta + 2\,\mathrm{ctg}\,\zeta\, d\zeta.$$

Gemäss dem Umstande, dass auch die neu eingeführten Komplexe involutorisch sind, ergibt sich wieder:

$$4\sum_1^6{}^i\, d\,x_i^2 = M_1\, d\,\lambda_1^2 + M_2\, d\,\lambda_2^2 + M_3\, d\,\vartheta^2 + M_4\, d\,\zeta^2$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)(k_4-\lambda_1)},\quad M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = 4\,(x_4^2\,\mathrm{tg}^2\,\vartheta + (x_5^2+x_6^2)\,\mathrm{ctg}^2\,\vartheta) = 4\,r^2$$

$$= \frac{4\,(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)\,\psi}{(k_1-k_4)(k_2-k_4)(k_3-k_4)},$$

$$M_4 = 4\,(x_5^2\,\mathrm{tg}^2\,\zeta + x_6^2\,\mathrm{ctg}^2\,\zeta) = 4\,r^2\sin^2\vartheta.$$

Die partielle Differentialgleichung der speziellen Komplexe wird:

$$\sum_1^6{}^i\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2\cdot\frac{(k_1-\lambda_1)\cdots(k_4-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)} + \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2\cdot\frac{(k_1-\lambda_2)\cdots(k_4-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)}$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2\cdot\frac{(k_1-k_4)(k_2-k_4)(k_3-k_4)}{4\,(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)} + \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)^2\cdot\frac{(k_1-k_4)(k_2-k_4)(k_3-k_4)}{4\,(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)\cdot\sin^2\vartheta}.$$

Durch den Vergleich mit der Identität:

$$\frac{\lambda_1-a}{(\lambda_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_1)} + \frac{\lambda_2-a}{(\lambda_2-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)} + \frac{1}{(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)}$$

$$\cdot\left(a-k_4-\frac{c}{\sin^2\vartheta}\right) + \frac{c}{(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)\sin^2\vartheta} = 0$$

resultiert:

$$W = \int\frac{d\,\lambda_1}{k_4-\lambda_1}\cdot\sqrt{\frac{\lambda_1-a}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)}}$$

$$+\int\frac{d\,\lambda_2}{k_4-\lambda_2}\cdot\sqrt{\frac{\lambda_2-a}{(k_1-\lambda_2)(k_2-\lambda_2)(k_3-\lambda_2)}}$$

$$+\frac{2\sqrt{a-k_4}}{\sqrt{(k_1-k_4)(k_2-k_4)(k_3-k_4)}}\int\frac{d\,\vartheta}{\sin\vartheta}\sqrt{\sin^2\vartheta-\frac{c}{a-k_4}}$$

$$+ 2\,\zeta\cdot\sqrt{\frac{c}{(k_1-k_4)(k_2-k_4)(k_3-k_4)}} + C.$$

Die vorkommenden Integrale sind elliptische. Die Integralfläche $W = 0$ hat mit $\lambda = a$ und mit $\sin^2 \vartheta = \frac{c}{a - k_4}$ je eine spezielle Kongruenz gemein, so dass das eine System Haupttangenten dem Komplexe $\lambda = a$, das andere dem Komplexe $\vartheta = \text{const.}$ entnommen ist.

3. Der Fall [11(11)(11)] behandelt den Komplex: 3. [11(11)(11)]

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2 + x_4^2}{k_3 - \lambda} + \frac{x_5^2 + x_6^2}{k_4 - \lambda} = 0$$
$$= \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_3 - \lambda)(k_4 - \lambda)}.$$

Eine beliebige Raumgerade gehört 2 Schar-Komplexen an; ihre Koordinaten lassen sich mittels der Komplexe ϑ und ζ, welche unter sich und zu den quadratischen Komplexen involutorisch sind, darstellen in der Form:

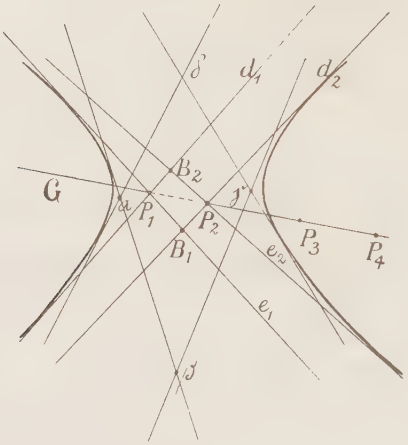
$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_4 - k_1)}, \quad \sigma x_2^2 = \frac{(k_2 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)(k_4 - k_2)},$$

$$\sigma r^2 = \frac{(k_3 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_2)}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_4 - k_3)}, \quad \sigma r'^2 = \frac{(k_4 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_2)}{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4)},$$

$$x_3 = r \cos \vartheta, \quad x_4 = r \sin \vartheta, \quad x_5 = r' \cos \zeta, \quad x_6 = r' \sin \zeta.$$

Doppelgerade sind die Seiten eines räumlichen Vierseits, die Leitgeraden der Kongruenzen $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ statt: Die Singularitätenfläche wird nach Weiler von 2 Flächen zweiten Grades gebildet, die sich nach dem Vierseit durchdringen, alle ihre Tangenten sind singuläre Linien. Die beliebige Gerade g möge die erste Fläche F in den Punkten P_1 P_2, die zweite F' in P_3 und P_4 durchstossen, $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ sei das windschiefe Viereck, also $\alpha\ \delta$ und $\beta\ \gamma$ das Geraden-Paar $0, 0, 1, +i, 0, 0$ aus den Scharen S_1 und S_1', $\alpha\ \beta$ und $\gamma\ \delta$ das Paar $0, 0, 0, 0, 1, +i$ aus den Scharen S_2 und S_2' der Flächen F und F'. Durch P_1 und P_2 gehen je eine Gerade d der Schar S_1 und e der

Schar S_2; da eine d und eine e sich jedesmal schneiden, ist $g\,e_1\,d_2 = \mathrm{I}$ die eine Tangentialebene an F mit dem Berührpunkt B_1, $g\,e_2\,d_1 = \mathrm{II}$ die andere mit B_2. Es weist nun der Komplex ϑ, dem g angehört, dem Punkte P_1 die Ebene I zu, die durch g und die Treffgerade e_1 vom $\alpha\,\delta$ und $\beta\,\gamma$ geht, und



dem P_2 die Ebene $g\,e_2 = \mathrm{II}$; der Komplex ζ hingegen verknüpft P_1 mit $g\,d_1 = \mathrm{II}$, P_2 mit $g\,d_2 = \mathrm{I}$. Da Analoges sich bei Betrachtung der Fläche F' ergibt und, wie im allgemeinen Falle, derjenige quadratische Komplex, der $B_1\,P_3$ als die zu P_3 gehörige singuläre Linie hat, die Gerade g als Komplexgerade besitzt, bekommen wir folgendes Schema:

	P_1	P_2	P_3	P_4	
Zuordnung:	I	II	III	IV	durch Komplex ϑ,
	II	I	IV	III	durch ζ,
	III	IV	I	II	durch λ_1,
	IV	III	II	I	durch λ_2.

Die singulären Linien $\lambda_1 = \lambda_2$ sind Tangenten von F oder F'; $\lambda_1 = \lambda_2$ beliebig, ϑ und ζ konstant geben alle Tangenten in einem bestimmten Punkte auf F oder F'. $\lambda_1 = \lambda_2 = k_3$,

$\zeta = \text{const.}$, ϑ beliebig bezeichnet eine Gerade e der Scharen S_2, S_2', dagegen $\lambda_1 = \lambda_2 = k_4$, $\vartheta = \text{const.}$, ζ beliebig, eine d aus S_1 oder S_1'; sie sind natürlich Haupttangentenkurven der Singularitätenfläche; dies bestätigt die Differentialgleichung:

$$4 \cdot \sum_1^6 i \, d\, x_i^2 = M_1 \, d\lambda_1^2 + M_2 \, d\lambda_2^2 + M_3 \, d\vartheta^2 + M_4 \, d\zeta^2 = 0,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_1)}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = 4(x_3^2 \operatorname{tg}^2\vartheta + x_4^2 \operatorname{ctg}^2\vartheta) = 4r^2 = \frac{4(k_3 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_4 - k_3)},$$

$$M_4 = 4(x_5^2 \operatorname{tg}^2\zeta + x_6^2 \operatorname{ctg}^2\zeta) = 4r'^2 = \frac{4(k_4 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4)}.$$

Die partielle Differentialgleichung der speziellen Komplexe:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 \cdot \frac{(k_1 - \lambda_1) \cdots (k_4 - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 \cdot \frac{(k_1 - \lambda_2) \cdots (k_4 - \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$+ \left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 \cdot \frac{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_4 - k_3)}{4(k_3 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_2)} + \left(\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right)^2 \cdot \frac{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4)}{4(k_4 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_2)} = 0$$

führt zur Gleichung der Integralfläche:

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_3 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_1)} \cdot \sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)} + \int \varphi_2 \, d\lambda_2$$
$$+ \sqrt{\frac{-4(k_3 - a)(k_3 - b)}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_4 - k_3)^2}} \cdot \vartheta$$
$$+ \sqrt{\frac{-4(k_4 - a)(k_4 - b)}{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4)^2}} \cdot \zeta + C = 0,$$

wo das zweite Integral wie das erste gebaut ist.

Hieran knüpfen sich, wie an den analogen Fall der Raumgeometrie,[1]) noch besondere Bemerkungen:

Durch Elimination von x_1 und x_2 aus $J = 0$, $\varphi(\lambda_1) = 0$, $\varphi(\lambda_2) = 0$ oder auch mittels der Parameterdarstellung findet man:

[1]) Clebsch-Lindemann II, 1, p. 316 ff.

$$(x_3^2 + x_4^2) \cdot \frac{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}{(k_3 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_2)} + (x_5^2 + x_6^2) \cdot \frac{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)}{(k_4 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_2)} = 0$$

$$= \eta_3 \eta_4 \cdot \frac{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}{(k_3 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_2)} + \eta_5 \eta_6 \cdot \frac{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)}{(k_4 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_2)},$$

$$\frac{\eta_3}{\eta_6} = \frac{\eta_5}{\eta_4} \cdot \left(- \frac{(k_3 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_2)(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)}{(k_4 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_2)(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} \right).$$

wobei für $x_3 + i\,x_4$ die Variable η_3 oder gemäss der Weilerschen Einführung $2\,p_{13}$ steht, ebenso

$$x_3 - i\,x_4 = \eta_4 = 2\,p_{42},\ x_5 + i\,x_6 = \eta_5 = 2\,p_{12},$$
$$x_5 - i\,x_6 = \eta_6 = 2\,p_{34}.$$

Aus $\frac{\eta_3}{\eta_4} = \frac{x_3 + i\,x_4}{x_3 - i\,x_4} = \frac{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}{r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)} = e^{2i\vartheta}$ folgt nun $\vartheta = -\frac{i}{2} \lg \frac{\eta_3}{\eta_4}$, ebenso $\zeta = -\frac{i}{2} \lg \frac{\eta_5}{\eta_6}$.

Daher lässt sich die Gleichung der Integralfläche schreiben:

$$\sqrt{\varkappa_3} \cdot \lg \frac{\eta_3}{\eta_1} + \sqrt{\varkappa_4} \lg \frac{\eta_5}{\eta_6} = \int \frac{d\lambda_1}{(k_3 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_1)} \sqrt{\frac{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)}}$$

$$+ \int \frac{d\lambda_2}{(k_3 - \lambda_2)(k_4 - \lambda_2)} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)}{(k_1 - \lambda_2)(k_2 - \lambda_2)}} + C = f(\lambda_1, \lambda_2),$$

dabei ist

$$\varkappa_3 = \frac{(k_3 - a)(k_3 - b)}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_4 - k_3)^2},$$

$$\varkappa_4 = \frac{(k_4 - a)(k_4 - b)}{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4)^2}.$$

In einer neuen Variabeln μ, wo $\frac{\eta_3}{\eta_4} = e^{\mu}$, ausgedrückt, wird

$$\frac{\eta_5}{\eta_6} = e^{\frac{f(\lambda_1, \lambda_2)}{\sqrt{\varkappa_4}}} \cdot e^{-\mu \cdot \sqrt{\frac{\varkappa_3}{\varkappa_4}}}.$$

Der obige Wert von $\frac{\eta_3}{\eta_6}$ gibt, wenn man beide Seiten mit $\frac{\eta_3}{\eta_6}$ multipliziert und die Wurzel auszieht:

$$\frac{\eta_3}{\eta_6} = \sqrt{\frac{\eta_5}{\eta_6}} \cdot \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_4}} \cdot \sqrt{-\frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)(k_1-k_4)(k_2-k_4)}{(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3)}}$$

$$= \sqrt{\Delta} \cdot e^{\frac{f(\lambda_1,\lambda_2)}{2\sqrt{\varkappa_4}}} \cdot e^{-\frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{\varkappa_3}{\varkappa_4}}+\frac{\mu}{2}},$$

$$\Delta = -\frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)(k_1-k_4)(k_2-k_4)}{(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3)},$$

$$\frac{\eta_4}{\eta_6} = \frac{\eta_4}{\eta_3}\cdot\frac{\eta_3}{\eta_6} = \sqrt{\Delta}\cdot e^{\frac{f(\lambda_1,\lambda_2)}{2\sqrt{\varkappa_4}}}\cdot e^{-\frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{\varkappa_3}{\varkappa_4}}-\frac{\mu}{2}}.$$

Wählt man endlich die mit λ_1 und λ_2 konstanten Grössen γ und δ so, dass gilt:

$$\gamma_3 : \gamma_4 : \gamma_5 : \gamma_6 = e^{\frac{1}{2}} : e^{-\frac{1}{2}} : e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa_3}{\varkappa_4}}} : e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa_3}{\varkappa_4}}},$$

$$\delta_3 : \delta_4 : \delta_5 : \delta_6 = \sqrt{\Delta}\cdot e^{\frac{f(\lambda_1,\lambda_2)}{2\sqrt{\varkappa_4}}} : \sqrt{\Delta}\cdot e^{\frac{f(\lambda_1,\lambda_2)}{2\sqrt{\varkappa_4}}} : e^{\frac{f(\lambda_1,\lambda_2)}{\sqrt{\varkappa_4}}} : 1,$$

so kann man setzen:

$$\eta_3 = \delta_3\cdot\gamma_3^{\mu},\ \eta_4 = \delta_4\cdot\gamma_4^{\mu},\ \eta_5 = \delta_5\cdot\gamma_5^{\mu},\ \eta_6 = \delta_6\cdot\gamma_6^{\mu};$$

$$\delta_3\,\delta_4\cdot\frac{(k_1-k_3)(k_2-k_3)}{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)} + \delta_5\,\delta_6\cdot\frac{(k_1-k_4)(k_2-k_4)}{(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)} = 0.$$

δ_3, δ_4, δ_5, δ_6 können demnach zusammen mit x_1, x_2 ebenso wie die η als Linienkoordinaten einer Geraden erscheinen, die den Komplexen λ_1 und λ_2 gemeinsam ist. Die veränderliche Gerade η ist durch die feste in einer Weise ausgedrückt, die uns lehrt, dass die Integralflächen gleichzeitig mit der Kongruenz λ_1, λ_2 durch stetige Transformation in sich übergehen; sie könnten daher auch gefunden werden, indem man von dieser Bedingung ausgeht. Dass die Bedingung des Schneidens benachbarter Geraden erfüllt ist, zeigen die fertigen Formeln:

$$d\,\eta_i = \eta_i \lg \gamma_i\, d\,\mu; \quad i = 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Die Bedingung reduziert sich, da mit λ_1 und λ_2 auch x_1 und x_2 konstant sind, auf:

$$0 = d\eta_3 d\eta_4 + d\eta_5 d\eta_6 = d\mu^2 (\eta_3 \eta_4 \lg\gamma_3 \lg\gamma_4 + \eta_5 \eta_6 \lg\gamma_5 \lg\gamma_6)$$
$$= \varrho\, d\mu^2 \left(\eta_3 \eta_4 \cdot (-\tfrac{1}{4}) + \eta_5 \eta_6 \cdot \left(-\frac{\varkappa_3}{4\varkappa_4}\right)\right)$$
$$= -\frac{\varrho\, d\mu^2}{4}\left(\eta_3 \eta_4 + \frac{(k_3-a)(k_3-b)(k_1-k_4)(k_2-k_4)}{(k_4-a)(k_4-b)(k_1-k_3)(k_2-k_3)} \cdot \eta_5 \eta_6\right);$$

Dies ist der Fall, sobald $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$ genommen wird.

Auf die von Weiler gegebene Differentialgleichung der Developpablen singulärer Linien:

$$(1+K)\left(\frac{dB}{B}\right)^2 - K\left(\frac{dC}{C}\right)^2 = 0$$

kommen wir, wenn wir $K = \dfrac{-A}{1+A} = \dfrac{-\eta_3\eta_4}{\eta_3\eta_4 + \eta_5\eta_6}$, $B = \dfrac{\eta_5}{\eta_6}$, $C = \dfrac{\eta_3}{\eta_4}$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ nehmen; so wird seine Differentialgleichung $\dfrac{1}{1+A}(2i\,d\zeta)^2 + \dfrac{A}{1+A}(2i\,d\vartheta)^2 = 0$ oder $A\,d\vartheta^2 + d\zeta^2 = 0$ im Einklang mit der unsrigen für $d\lambda_1 = d\lambda_2 = 0$. Weilers Lösung[1]) $B = c \cdot C^{\sqrt{\frac{K}{1+K}}}$ geht aus unserer allgemeineren hervor, wenn wir in der Form $\dfrac{\eta_5}{\eta_6} = e^{\frac{f(\lambda_1,\lambda_2)}{\sqrt{\varkappa_4}}} \cdot \left(\dfrac{\eta_3}{\eta_4}\right)^{-\sqrt{\frac{\varkappa_3}{\varkappa_4}}}$ für $e^{\frac{f(\lambda_1,\lambda_2)}{\sqrt{\varkappa_4}}}$ c und $\lambda_1 = \lambda_2 = a = b$ setzen.

[1]) Ein in der Arbeit vorkommender Druckfehler sei hiemit richtig gestellt, es muss heissen:

$$p_{34} = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}(1+K)}, \quad p_{42} = \pm\sqrt{\frac{A}{C}K}.$$

4. Fall [1(11)(111)] enthält die Komplexschar: 4. [1(11)(111)]

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{k_2 - \lambda} + \frac{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}{k_4 - \lambda} = 0 = \frac{(\lambda - \lambda_1)\,\psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_4 - \lambda)}.$$

Eine beliebige Gerade gehört nur einem Komplex der Schar an; ihre Koordinaten lassen sich mittels der Komplexe ξ, ϑ, ζ darstellen:

$$\sigma\, x_1^2 = \frac{k_1 - \lambda_1}{(k_2 - k_1)(k_4 - k_1)},\ \sigma\,(x_2^2 + x_3^2) = \sigma\,\varrho^2 = \frac{k_2 - \lambda_1}{(k_1 - k_2)(k_4 - k_2)},$$

$$\sigma\,(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) = \sigma\, r^2 = \frac{k_4 - \lambda_1}{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)};$$

$$x_1 = \varrho\cos\xi,\ x_3 = \varrho\sin\xi,\ x_4 = r\cos\vartheta,\ x_5 = r\sin\vartheta\cos\zeta,$$

$$x_6 = r\sin\vartheta\sin\zeta.$$

Die Singularitätenfläche ist wieder eine doppelt zählende F_2, Doppelgerade ist jede „Erzeugende“ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; die Geraden der anderen Schar $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ sollen wieder Direktrizen heissen. Für jeden Punkt der Fläche zerfällt der Komplexkegel in 2 Ebenen, die sich längs der durch den Punkt laufenden Doppelgeraden schneiden. Die Ebenen fallen zusammen für die Punkte der Direktrizen h und h', deren Koordinaten $0, 1, \pm i, 0, 0, 0$ sind, und zwar in die Tangentialebenen der Fläche; es ergeben nämlich die Formeln des Falles 2, wenn man $k_2 = k_3$ setzt, sowohl die Koordinaten x' der singulären Direktrizen r als auch die x'' der zugehörigen r' die bezeichneten Werte. Der Komplexkegelschnitt jeder Ebene berührt daher die Fläche in den beiden Punkten, wo h und h' die Ebene durchstossen. Hiezu gelangt auch Weiler, in Uebereinstimmung mit Segre, der eine Schar Kegelschnitte mit doppelter Berührung zum Vergleiche beizieht. Wie dort durch eine vorgegebene Tangente ein Kegelschnitt bestimmt wird, so gehört hier eine Gerade einem Komplexe der konfokalen Schar an; den Tangentialkomplex zu der Geraden finden wir folgendermassen: Die Gerade bestimmt einen gewissen Komplex ξ aus

der Schar $x_2 + \lambda x_3 = 0$, der dazu involutorische Komplex derselben Schar hat mit $x_1 = 0$ eine lineare Kongruenz gemein. Derjenige Komplex dieser Kongruenz, dem die Gerade angehört, ist der gesuchte Tangentialkomplex; es entspricht diese Konstruktion der Lösung obiger Kegelschnittaufgabe, wo der Berührungspunkt des Kegelschnittes auf der gegebenen Geraden harmonisch liegt zu den Flächentangenten in den Punkten, wo h und h' die Ebene treffen.

Die Differentialgleichung, welche das Schneiden benachbarter Geraden ausdrückt, ist:

$$4 \sum d x_i^2 = 0 = M_1 d \lambda_1^2 + M_2 d \xi^2 + M_3 d \vartheta^2 + M_4 d \zeta^2.$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)(k_4-\lambda_1)}, \quad M_2 = 4\varrho^2 = \frac{4(k_2-\lambda_1)\psi}{(k_1-k_2)(k_4-k_2)},$$

$$M_3 = 4r^2 = \frac{4(k_4-\lambda_1)\psi}{(k_1-k_4)(k_2-k_4)}, \quad M_4 = 4r^2 \sin^2\vartheta.$$

Auf die Identität:

$$\frac{\lambda_1 - a}{(k_2-\lambda_1)(k_4-\lambda_1)} + \frac{a-k_2}{(k_2-\lambda_1)(k_4-k_2)} + \frac{1}{k_4-\lambda_1}\left[\frac{k_4-a}{k_4-k_2} - \frac{c}{\sin^2\vartheta}\right] + \frac{c}{\sin^2\vartheta\,(k_4-\lambda_1)} = 0$$

führt es, wenn wir setzen:

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_2-\lambda_1)(k_4-\lambda_1)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1-a}{k_1-\lambda_1}} + \frac{2}{k_4-k_2} \cdot \sqrt{\frac{a-k_2}{k_1-k_2}} \cdot \xi$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{(k_1-k_4)(k_2-k_4)}} \cdot \int \sqrt{\frac{k_4-a}{k_4-k_2} - \frac{c}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{(k_1-k_4)(k_2-k_4)}}\,\zeta + C.$$

5. Die Komplexschar im Falle des allgemeinen Tetraedral- 5. [(11)(11)(11)]
komplexes [(11)(11)(11)] ist:

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_3^2 + x_4^2}{k_2 - \lambda} + \frac{x_5^2 + x_6^2}{k_3 - \lambda} = \frac{(\lambda - \lambda_1)\,\psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_3 - \lambda)},$$

$$\sigma r^2 = \frac{k_1 - \lambda_1}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)},\quad \sigma r'^2 = \frac{k_2 - \lambda_1}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)},\quad \sigma r''^2 = \frac{k_3 - \lambda_1}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)};$$

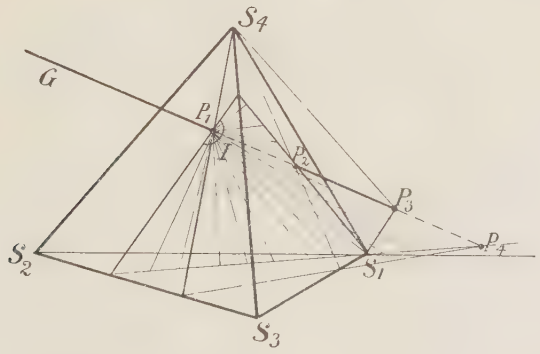
$$x_1 = r\cos\eta,\ x_2 = r\sin\eta;\ x_3 = r'\cos\vartheta,\ x_4 = r'\sin\vartheta;$$

$$x_5 = r''\cos\zeta,\ x_6 = r''\sin\zeta.$$

Die Leitgeraden der Kongruenzen und Komplexscharen seien:

$S_1 S_2$ und $S_3 S_4$ für $x_1 = 0,\ x_2 = 0$, Komplexschar η,
$S_1 S_3$ „ $S_2 S_4$ „ $x_3 = 0,\ x_4 = 0$, „ ϑ,
$S_1 S_4$ „ $S_2 S_3$ „ $x_5 = 0,\ x_6 = 0$, „ ζ.

Die den Komplex λ bestimmende Gerade g schneide Ebene $S_2 S_3 S_4 = E_1$ in P_1 und schicke durch S_1 die Ebene I u. s. f.



Da dem Komplex λ alle durch P_1 in I verlaufenden Geraden angehören[1]) — von S_1 gesehen, liegen ihre Schnittpunkte mit

[1]) Einfacher Beweis bei Reye III, p. 6: g, $S_1 P_1$ und der Schnitt von E_1 mit I sind Komplexgerade.

dem Tetraeder perspektiv; so folgt das gleiche Doppelverhältnis — da ferner dem Komplexe η die Gerade $P_1 S_2$ als Treffgerade von $S_1 S_2$ und $S_3 S_4$ eignet u. s. w., so ist die Zuordnung von

$$\begin{array}{cccccc} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \\ \text{zu} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{durch } \lambda, \\ \text{zu} & \text{II} & \text{I} & \text{IV} & \text{III} & \text{durch } \eta, \\ \text{zu} & \text{III} & \text{IV} & \text{I} & \text{II} & \text{durch } \vartheta, \text{ und} \\ \text{zu} & \text{IV} & \text{III} & \text{II} & \text{I} & \text{durch } \zeta \text{ gegeben.} \end{array}$$

Der Komplexkegelschnitt einer Ebene, welche g in A schneidet, hat als Tangenten die beiden Erzeugenden des durch g, $A S_1$, $A S_2$, $A S_3$ und $A S_4$ festgelegten Kegels von A und die Schnittlinien mit den Tetraederebenen.

Es sind nämlich, wie die Form von φ ohne weiteres dartut, alle Gerade durch die Ecken und in den Ebenen des Tetraeders als gemeinsame Elemente der drei zerfallenen Komplexe $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_3^2 + x_4^2 = 0$, $x_5^2 + x_6^2 = 0$ sämtlichen Komplexen der konfokalen Schar gemein.

Das Resultat der Differentialgleichung:

$$4 \sum dx_i^2 = \frac{d\lambda_1^2}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)} + 4 \frac{k_1 - \lambda_1}{(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)} d\eta^2$$
$$+ 4 \frac{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)}{k_2 - \lambda_1} d\vartheta^2 + 4 \frac{k_3 - \lambda_1}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} d\zeta^2 = 0$$

und der zugehörigen partiellen Differentialgleichung wird:

$$W = \int \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b}}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)} d\lambda_1 + \frac{\sqrt{-(k_1 - a)(k_1 - b)}}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} \eta$$
$$+ \frac{\sqrt{-(k_2 - a)(k_2 - b)}}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)} \vartheta + \frac{\sqrt{-(k_3 - a)(k_3 - b)}}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} \zeta + C = 0.$$

Substituiert man:

$$x_1 + i x_2 = e^{i\eta} = 2 p_{12}, \quad x_1 - i x_2 = e^{-i\eta} = 2 p_{34},$$
$$x_3 + i x_4 = e^{i\vartheta} = 2 p_{13}, \quad x_3 - i x_4 = e^{-i\vartheta} = 2 p_{42},$$
$$x_5 + i x_6 = e^{i\zeta} = 2 p_{14}, \quad x_5 - i x_6 = e^{-i\zeta} = 2 p_{23},$$

also $\eta = -\frac{i}{2} \lg \frac{p_{12}}{p_{34}}$, $\vartheta = -\frac{i}{2} \lg \frac{p_{13}}{p_{42}}$, $\zeta = -\frac{i}{2} \lg \frac{p_{14}}{p_{23}}$,

und $$\varkappa_1 = \frac{\sqrt{(k_1 - a)\,(k_1 - b)}}{(k_2 - k_1)\,(k_3 - k_1)} \text{ u. s. f.,}$$

so ergibt sich:

$$\varkappa_1 \cdot \lg \frac{p_{12}}{p_{34}} + \varkappa_2 \cdot \lg \frac{p_{13}}{p_{42}} + \varkappa_3 \cdot \lg \frac{p_{14}}{p_{23}} = f(\lambda_1)$$

oder $$F = \left(\frac{p_{12}}{p_{34}}\right)^{\varkappa_1} \cdot \left(\frac{p_{13}}{p_{42}}\right)^{\varkappa_2} \cdot \left(\frac{p_{14}}{p_{23}}\right)^{\varkappa_3} = e^{f(\lambda_1)};$$

für $\lambda_1 = \text{const.}$ wird $F = e^C$.

Wie stets, so liegt auch hier ein spezieller Komplex vor, dessen Linien die Integralfläche umhüllen; da seine Gleichungsform algebraisch ist, so wird auch das Umhüllungsgebilde seiner Komplexkegel, durch Differentiation und Elimination der Kegelspitzen abgeleitet, in der algebraischen Form $x^\alpha\, y^\beta\, z^\gamma = C$ erscheinen.[1])

6. Die Form [(111)(111)] oder 6. [(111)(111)]

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}{k_4 - \lambda} = 0 = \frac{\psi}{(k_1 - \lambda)\,(k_4 - \lambda)}$$

liefert keine Schar, sondern nur einen einzigen und zwar einen speziellen Komplex, dem natürlich eine beliebige Gerade nicht angehört; λ ist lediglich Faktor der Identität, so dass es herausfällt:

$$k_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + k_1 (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) = 0.$$

In der Tat ist:

$$\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{(k_1 - \lambda)^2} + \frac{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}{(k_2 - \lambda)^2}$$

---

[1]) Klein und Lie, „Sur une certaine famille de courbes et de surfaces." Comptes rendus t. 70; 1870.

mit $\varphi = 0$ und $J = 0$ zugleich erfüllt. Jede Komplexgerade ist Tangente der Fläche zweiten Grades und zugleich singuläre Linie, so dass die Komplexkegel und -kegelschnitte mit den Tangentialkegeln und Schnittkurven der Fläche identisch sind. Integralfläche des Komplexes ist, weil er speziell ist, die Singularitätenfläche und nur sie.

Will man auch hier eine beliebige (dem Komplexe nicht eigene) Gerade in Parameterform darstellen, so hat man 4 Hilfskomplexe einzuführen:

$$x_1 = r\cos\eta,\ x_2 = r\sin\eta\cos\xi,\ x_3 = r\sin\eta\sin\xi,$$
$$x_4 = r'\cos\vartheta,\ x_5 = r'\sin\vartheta\cos\zeta,\ x_6 = r'\sin\vartheta\sin\zeta,$$
$$\sigma r^2 = \frac{1}{k_4 - k_1},\ \sigma r'^2 = \frac{1}{k_1 - k_4}.$$

Ausser den linearen Komplexen ξ und ζ sind dabei die quadratischen η und ϑ verwendet: $x_1^2 \operatorname{tg}^2\eta = x_2^2 + x_3^2$ und $x_4^2 \operatorname{tg}^2\vartheta = x_5^2 + x_6^2$, Komplexe der Art [1(11)(111)]; bei Aufstellung und Lösung der Differentialgleichung stossen wir daher auf die Resultate des Falles 4. Hier wird:

$$\Sigma d x_i^2 = \frac{1}{k_4 - k_1}\cdot(d\eta^2 + \sin^2\eta\, d\xi^2 - d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta\, d\zeta^2) = 0,$$

dort war:

$$\frac{d\lambda_1^2}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_1)} + \frac{4(k_2 - \lambda_1)\, d\xi^2}{(k_1 - k_2)(k_4 - k_2)}$$
$$+ \frac{4(k_4 - \lambda_1)}{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\zeta^2) = 0.$$

Durch Division mit $-\dfrac{4(k_4 - \lambda_1)}{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)}$ und Substitution des Wertes $\operatorname{tg}^2\eta = \dfrac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} = -\dfrac{(k_4 - k_1)(k_2 - \lambda_1)}{(k_4 - k_2)(k_1 - \lambda_1)}$ lassen sich die beiden Gleichungen identifizieren; ebenso geht die Lösung im vorliegenden Falle:

$$W = \int \sqrt{b - \frac{d}{\sin^2 \eta}}\, d\eta + \sqrt{d} \cdot \xi + \int \sqrt{b - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}}\, d\vartheta + \zeta + C$$

in die frühere über:

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_2 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_1)} \sqrt{\frac{\lambda_1 - a}{k_1 - \lambda_1} + \frac{2}{k_4 - k_2}} \cdot \sqrt{\frac{a - k_2}{k_1 - k_2}}\, \xi$$

$$- \frac{2}{\sqrt{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)}} \cdot \int \sqrt{\frac{k_4 - a}{k_4 - k_2} - \frac{c}{\sin^2 \vartheta}}\, d\vartheta - \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)}}\, \zeta + c,$$

wenn man für η den angegebenen Wert und

$$b = \frac{k_4 - a}{c\,(k_4 - k_2)}, \quad d = \frac{(a - k_2)(k_1 - k_4)}{c\,(k_1 - k_2)(k_2 - k_4)}$$

nimmt und multipliziert mit

$$\frac{-2\sqrt{c}}{\sqrt{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)}}.$$

In ähnlicher Weise würde die Betrachtung zerfallener Komplexe keine neuen Resultate zutage fördern; es sei nur auf den einen Fall [11(1111)] kurz eingegangen.

Eine beliebige Gerade gehört einem Komplex der Schar an:

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}{k_4 - \lambda} = \frac{(\lambda - \lambda_1)\psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_4 - \lambda)}.$$

Jeder Komplex zerfällt in zwei lineare; der Komplexkegel eines jeden Punktes bricht in zwei Ebenen auf mit der Geraden aus der Kongruenz von Doppelgeraden: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ als Schnittlinie, so dass jeder Punkt und dual jede Ebene im Raum als singulär erscheint. Berechnet man auch hier die Differentialgleichung mittels der Einführung involutorischer Komplexe η, ϑ, ζ:

$$x_3 = r\cos\eta, \quad x_4 = r\sin\eta\cos\vartheta, \quad x_5 = r\sin\eta\sin\vartheta\cos\zeta,$$

$$x_6 = r\sin\eta\sin\vartheta\sin\zeta, \quad \sigma r^2 = \frac{k_4 - \lambda}{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)},$$

so wird:

$$\sum d\,x_i^2 = \frac{d\,\lambda^2}{(k_1-\lambda)\,(k_2-\lambda)\,(k_4-\lambda)}$$

$$+\frac{4\,(k_4-\lambda)}{(k_1-k_4)\,(k_2-k_4)}\,(d\,\eta^2+\sin^2\eta\,d\,\vartheta^2+\sin^2\eta\,\sin^2\vartheta\,d\,\zeta^2)=0;$$

da nun η vermöge der Beziehung $\operatorname{tg}^2\eta = \frac{x_4^2+x_5^2+x_6^2}{x_3^2}$ den Komplex [(11)1(111)] vorstellt, schreiben wir:

$$\operatorname{tg}^2\eta = \frac{(k_4-\mu)\,(k_1-k_2)}{(k_1-\mu)\,(k_2-k_4)},$$

den Komplex λ aber vergleichen wir mit ξ, d. h. mit der Beziehung, die im Falle 4 zwischen x_2 und x_3 besteht:

$$\operatorname{tg}^2\xi = \frac{(k_1-\lambda)\,(k_4-k_2)}{(k_2-\lambda)\,(k_1-k_4)}.$$

Durch die so gewonnenen Substitutionen für λ und η erhalten wir:

$$\frac{d\,\mu^2\,(k_1-k_4)\,(k_2-k_4)}{4\,(k_1-\mu)\,(k_2-\mu)\,(k_4-\mu)^2}+\frac{(k_2-\mu)\,(k_4-k_1)}{(k_4-\mu)\,(k_1-k_2)}\,d\,\xi^2$$
$$+\,d\,\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\,\zeta^2=0,$$

genau wie im Falle 4.

Die Einführung von Hilfskomplexen führt also zu keinen neuen Ergebnissen; wir können daher die zerfallenen Komplexe übergehen.

II. Kanonische Form [11112].

Für die zweite kanonische Form [11112] schreiben wir die Identität

$$P = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + 2\,y_5\,y_6 = 0$$

und den Komplex

$$\Omega = k_1\,y_1^2 + k_2\,y_2^2 + k_3\,y_3^2 + k_4\,y_4^2 + 2\,k_5\,y_5\,y_6 - y_5^2 = 0$$

unter Zugrundelegung der Elementarteiler-Determinante:

$$\begin{vmatrix} k_1-\lambda & & & & & \\ & k_2-\lambda & & & & \\ & & k_3-\lambda & & & \\ & & & k_4-\lambda & & \\ & & & & -1 & k_5-\lambda \\ & & & & k_5-\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Die singulären Linien sind herausgehoben durch den Komplex:

$$\Omega' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1\,y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2\,y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_3\,y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & k_4\,y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k_5\,y_6 - y_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & k_5\cdot y_5 \\ k_1\,y_1 & k_2\,y_2 & k_3\,y_3 & k_4\,y_4 & k_5\,y_6 - y_5 & k_5\,y_5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= k_1^2\,y_1^2 + k_2^2\,y_2^2 + k_3^2\,y_3^2 + k_4^2\,y_4^2 + 2\,k_5^2\,y_5\,y_6 - 2\,k_5\,y_5^2 = 0.$$

Als „zugeordnete“ Linie[1]) zu der singulären Geraden y, d. h. als eine der ∞^1 Geraden, die in der singulären Ebene durch den singulären Punkt von y verlaufen, erscheint eine Linie x des Tangentialkomplexes:

$$\sum x_i \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = 0,$$

für welche $P(x) = 0$ kraft $P(y) = 0$, $\Omega(y) = 0$ und $\Omega'(y) = 0$ erfüllt ist. Das ist der Fall, wenn man setzt:

$$\varrho x_1 = (k_1 - \lambda) y_1, \ldots, \quad \varrho x_4 = (k_4 - \lambda) y_4,$$
$$\varrho x_5 = (k_5 - \lambda) y_5, \qquad \varrho x_6 = (k_5 - \lambda) y_6 - y_5.$$

Dadurch wird in der Tat auch die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} \sum x_i \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = (k_1 - \lambda) k_1 y_1^2 + \cdots + (k_5 - \lambda) y_5 \cdot (k_5 y_6 - y_5)$$
$$+ ((k_5 - \lambda) y_6 - y_5) \cdot k_5 y_5 = \Omega' - \lambda \Omega = 0$$

befriedigt.

Die Koordinaten x sind nach dem Prinzip:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial (\Omega(y) - \lambda P(y))}{\partial y_i}$$

gebildet.

Die umgekehrte Auflösung gibt:

$$y_1 = \frac{\varrho x_1}{k_1 - \lambda}, \quad y_2 = \frac{\varrho x_2}{k_2 - \lambda}, \quad y_3 = \frac{\varrho x_3}{k_3 - \lambda}, \quad y_4 = \frac{\varrho x_4}{k_4 - \lambda},$$

$$y_5 = \frac{\varrho x_5}{k_5 - \lambda}, \quad y_6 = \frac{\varrho x_6}{k_5 - \lambda} + \frac{\varrho x_5}{(k_5 - \lambda)^2}.$$

---

[1]) Vgl. Klein, „Theorie der Linienkomplexe etc.“ Nr. 26. Math. Annalen II.

Es folgen durch Substitution dieser Werte die Umformungen

$$\frac{1}{\varrho^2}\cdot P(y) = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda)^2}+\frac{x_2^2}{(k_2-\lambda)^2}+\frac{x_3^2}{(k_3-\lambda)^2}+\frac{x_4^2}{(k_4-\lambda)^2} + \frac{2x_5x_6}{(k_5-\lambda)^2}+\frac{2x_5^2}{(k_5-\lambda)^3}=\chi,$$

$$\frac{1}{\varrho^2}\cdot \Omega(y) = \frac{k_1x_1^2}{(k_1-\lambda)^2}+\cdots+\frac{2k_5x_5x_6}{(k_5-\lambda)^2}+\frac{2k_5x_5^2}{(k_5-\lambda)^3}-\frac{x_5^2}{(k_5-\lambda)^2},$$

$$\frac{1}{\varrho^2}\cdot \Omega'(y) = \frac{k_1^2x_1^2}{(k_1-\lambda)^2}+\cdots+\frac{2k_5^2x_5x_6}{(k_5-\lambda)^2}+\frac{2k_5^2x_5^2}{(k_5-\lambda)^3}-\frac{2k_5x_5^2}{(k_5-\lambda)^2},$$

$$\frac{1}{\varrho^2}(\Omega-\lambda P)=\frac{x_1^2}{k_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{k_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{k_3-\lambda}+\frac{x_4^2}{k_4-\lambda}+\frac{2x_5x_6}{k_5-\lambda} + \frac{x_5^2}{(k_5-\lambda)^2}=\varphi,$$

$$\frac{1}{\varrho^2}(\Omega'-2\lambda\Omega+\lambda^2P)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_5x_6=J;$$

so bekommen wir für die singulären Linien folgende 3 Gleichungen:

$J=0$, die Identität der Linienkoordinaten, $\varphi=0$ den Komplex als einen aus der konfokalen Schar, $\chi=0$ den Hilfskomplex, der mit $\varphi=0$ die singulären Linien bestimmt.

Die der Differentialgleichung der Krümmungslinien analog gebaute Determinante ist hier:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} & \frac{\partial J}{\partial x_2} & \frac{\partial J}{\partial x_3} & \frac{\partial J}{\partial x_4} & \frac{\partial J}{\partial x_5} & \frac{\partial J}{\partial x_6} \\ d\frac{\partial J}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & d\frac{\partial J}{\partial x_5} & d\frac{\partial J}{\partial x_6} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi}{\partial x_5} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_6} \\ d\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & d\frac{\partial \varphi}{\partial x_5} & d\frac{\partial \varphi}{\partial x_6} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \chi}{\partial x_5} & \frac{\partial \chi}{\partial x_6} \\ d\frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & d\frac{\partial \chi}{\partial x_5} & d\frac{\partial \chi}{\partial x_6} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & x_6 & x_5 \\ d\,x_1 & d\,x_2 & \cdot & \cdot & & d\,x_6 & d\,x_5 \\ \dfrac{x_1}{k_1-\lambda} & \dfrac{x_2}{k_2-\lambda} & \dfrac{x_3}{k_3-\lambda} & \dfrac{x_4}{k_4-\lambda} & \dfrac{x_6}{k_5-\lambda} + \dfrac{x_5}{(k_5-\lambda)^2} & \dfrac{x_5}{(k_5-\lambda)} \\ \dfrac{d\,x_1}{k_1-\lambda} & \dfrac{d\,x_2}{k_2-\lambda} & \cdot & \cdot & \dfrac{d\,x_6}{k_5-\lambda} + \dfrac{d\,x_5}{(k_5-\lambda)^2} & \dfrac{d\,x_5}{k_5-\lambda} \\ \dfrac{x_1}{(k_1-\lambda)^2} & \dfrac{x_2}{(k_2-\lambda)^2} & \cdot & \cdot & \dfrac{x_6}{(k_5-\lambda)^2} + \dfrac{2\,x_5}{(k_5-\lambda)^3} & \dfrac{x_5}{(k_5-\lambda)^2} \\ \dfrac{d\,x_1}{(k_1-\lambda)^2} & \dfrac{d\,x_2}{(k_2-\lambda)^2} & \cdot & \cdot & \dfrac{d\,x_6}{(k_5-\lambda)^2} + \dfrac{2\,d\,x_5}{(k_5-\lambda)^3} & \dfrac{d\,x_5}{(k_5-\lambda)^2} \end{vmatrix}$$

Sie verschwindet wie im allgemeinen Falle für die singulären Linien und für die Kongruenz von Geraden, die den Komplexen λ_1 und λ_2 gemeinsam sind.

7. [11112] **7.** Im Falle [11112], dem allgemeinen der zweiten kanonischen Form, ist die Komplexgleichung:

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_4^2}{k_4-\lambda} + \frac{2\,x_5\,x_6}{k_5-\lambda} + \frac{x_5^2}{(k_5-\lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)\,\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_3-\lambda)(k_4-\lambda)(k_5-\lambda)^2},$$

so dass die Geraden des Raumes in folgender Weise dargestellt werden können:

$$\sigma\,x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)(k_1-\lambda_4)}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_4-k_1)(k_5-k_1)^2},$$

ebenso $\sigma\,x_2^2$, $\sigma\,x_3^2$ und $\sigma\,x_4^2$,

$$\sigma\,x_5^2 = \frac{(k_5-\lambda_1)(k_5-\lambda_2)(k_5-\lambda_3)(k_5-\lambda_4)}{(k_1-k_5)(k_2-k_5)(k_3-k_5)(k_4-k_5)} = A_5.$$

Um $2\,\sigma\,x_5\,x_6$ zu bekommen, denken wir uns $\varphi = 0$ mit $k_5-\lambda$ multipliziert, das Produkt nach λ differenziert und dann $\lambda = k_5$ gesetzt; so ergibt sich:

$$2\,\sigma\,x_5\,x_6 = -\frac{\partial\,A_5}{\partial\,k_5} = A_5\cdot\alpha_6,\quad \sigma\,x_6^2 = \tfrac{1}{4}\,A_5\,\alpha_6^2,$$

$$\alpha_6 = -\left(\frac{1}{k_5-\lambda_1}+\frac{1}{k_5-\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{k_1-k_5}+\cdots\right).$$

$x_5 = 0$ und $x_6 = 0$ sind spezielle Fundamentalkomplexe. Da in $\varrho\cdot\varphi = x_1^2\,(k_2-\lambda)\,(k_3-\lambda)\,(k_4-\lambda)\,(k_5-\lambda)^2 + \cdots + 2\,x_5\,x_6\,()\,()\,()\,()\,(k_5-\lambda) + x_5^2\,(k_1-\lambda)\cdots(k_4-\lambda) = 0$ x_6 nur einmal linear in Verbindung mit x_5 auftritt, so gehört die Leitgerade von $x_5 = 0$ (0, 0, 0, 0, 0, 1) allen Komplexen der Schar an und ist Doppelgerade der Singularitätenfläche.[1]) Diese ist die Plückersche Komplexfläche des allgemeinen Komplexes. „Polare“[2]) der Doppelgeraden — von Weiler „adjungierte“ Gerade genannt — ist die Achse von $x_6 = 0$, sie liegt nicht auf der Fläche und gehört keinem eigentlichen Komplexe der Schar, sondern nur den vier linearen $\lambda = k_1, k_2, k_3$ und k_4 zu. $\lambda = k_5$ gibt Treffgerade der Doppellinie, $\lambda_1 = \lambda_2 = k_5$ Tangenten von ihr aus, sie machen $2\,x_5\,x_6$ zu Null, aber x_6 nicht, sie schneiden also die Polare nicht i. A. $\lambda_3 = \lambda_4$ bezeichnet wieder eine Tangente der Singularitätenfläche, eine singuläre Linie des betreffenden Komplexes $\lambda = \lambda_3$. Ueberhaupt gelten bezüglich der λ dieselben Verhältnisse wie im „allgemeinen“ Falle; nur ist zu beachten, dass die Geraden des Raumes sich nicht mehr zu 32, sondern zu 16, Punkte und Ebenen zu je 8 gruppieren, da mit dem Zeichen von x_5 das von x_6 mitbestimmt ist. So gibt es auch nur 8 Doppelpunkte und 8 Doppelebenen, erfüllt von Geraden: $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$; hierunter sind insbesondere: $\lambda_1 = \lambda_2 = k_5$, $\lambda_3 = \lambda_4$ beliebig, Gerade durch die 4 Kuspidalpunkte, in denen die Doppelgerade die je 2 Doppelebenen ge-

[1]) Der Beweis kann ähnlich wie bei dem Falle [1111(11)] erbracht werden; wesentlich ist, dass die fragliche Gerade allen Komplexen λ angehört und ausserdem noch, dass sie im Doppelprodukte nur mit x_5 vorkommt; deshalb kann man nämlich $2\,x_5\,x_6 = 2\,p_{12}\,p_{34}$ nehmen und erhält für jeden Komplex λ als Komplexkegel eines Punktes von $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ einen zerfallenden: $a\,y_1^2 + 2\,b\,y_1\,y_2 + c\,y_2^2 = 0$.

[2]) Plücker, Neue Geometrie, Nr. 222.

meinsamen „singulären Achsen“ trifft, und in den 4 Kuspidalebenen, welche die Doppelgerade mit den je 2 Doppelpunkte tragenden „singulären Strahlen“ bestimmt.

Die 4 singulären Achsen haben im Kuspidalpunkte für alle ihre Ebenen einen Berührungspunkt, die 4 singulären Strahlen liegen ganz auf der Fläche und alle ihre Punkte haben die Kuspidalebene als Tangentialebene; diese 8 Geraden sind gegeben durch $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = k_5$.

Zur Bildung der Differentialgleichung differenzieren wir logarithmisch:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{d\lambda_1}{k_1-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_1-\lambda_2} - \frac{d\lambda_3}{k_1-\lambda_3} - \frac{d\lambda_4}{k_1-\lambda_4} \text{ u. s. f.,}$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_5}{x_5} = -\frac{d\lambda_1}{k_5-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_5-\lambda_2} - \frac{d\lambda_3}{k_5-\lambda_3} - \frac{d\lambda_4}{k_5-\lambda_4},$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_6}{x_6} = -\frac{d\lambda_1}{k_5-\lambda_1} - \cdots - \frac{2}{\alpha_6}\cdot\left(\frac{d\lambda_1}{(k_5-\lambda_1)^2} + \cdots\right).$$

Indem man geeignet multipliziert und quadriert, von den zwei letzten Termen aber das doppelte Produkt nimmt, erhält man unter Berücksichtigung der Identität die Gleichung

$$S^2(dx_i) = 4(dx_1^2 + \cdots + 2\,dx_5\,dx_6) = \sum_1^4{}^i M_i\,d\lambda_i = 0$$

als die Bedingung des Schneidens konsekutiver Geraden. Es heben sich nämlich die Koeffizienten der doppelten Produkte weg; der von $2\,d\lambda_1\,d\lambda_2$ beispielsweise wird:

$$\frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)} + \cdots + \frac{2x_5x_6}{(k_5-\lambda_1)(k_5-\lambda_2)} + \frac{2x_5x_6}{k_5-\lambda_1}\cdot\frac{1}{\alpha_6(k_5-\lambda_2)^2}$$
$$+ \frac{2x_5x_6}{k_5-\lambda_2}\cdot\frac{1}{\alpha_6(k_5-\lambda_1)^2} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot(\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2)) = 0,$$

weil $2x_5x_6 = \alpha_6 x_5^2$ ist, ferner wird

$$M_1 = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)^2} + \cdots + \frac{2\,x_5 x_6}{(k_5-\lambda_1)^2} + \frac{2\,x_5^2}{(k_5-\lambda_1)^3} = \chi(\lambda_1)$$

$$= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}{(k_1-\lambda_1)\cdots(k_5-\lambda_1)^2}\,\psi, \quad M_i = \chi(\lambda_i).$$

Die partielle Differentialgleichung spezieller Komplexe wird mittels der von Jacobi[1]) stammenden Rechnungsweise gefunden:

Setzt man:

$8\,T = 4\,(x_1'^2 + \cdots) = \sum_1^4{}^i M_i\,\lambda_i'^2 = 0$, so geht daraus die Gleichung $4\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots\right] = 0$ hervor durch die Substitution:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i'} = \frac{\partial W}{\partial x_i};$$

nimmt man ebenso:

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_i'} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = \tfrac{1}{4}\,M_i\,\lambda_i',$$

so bekommt man:

$$8\,T = 4\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots\right] = \sum_1^4{}^i M_i \cdot \frac{16\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\right)^2}{M_i^2} = 0$$

oder, als die gesuchte Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\,T = \sum_1^4{}^i \frac{1}{M_i}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung führt auf das Integral:

$$W = \sum_1^4{}^i \int \varphi_i\,d\,\lambda_i,$$

worin

$$\varphi_i = \frac{1}{(k_5-\lambda_i)} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}{(k_1-\lambda_i)\cdots(k_4-\lambda_i)}}$$

[1]) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik; 26. Vorl. Ellipt. Koordinaten.

Das Integral hat genau die gleiche Form wie bei dem allgemeinen Falle, wenn man dort $k_6 = k_5$ setzt;[1]) dieses Resultat lässt sich durch folgenden von Bôcher[2]) angegebenen Grenzübergang ableiten.

Wir ersetzen:

$$x_6 \sim x_5 + \varepsilon x_6, \; k_6 \sim k_5 - \varepsilon$$

und schreiben die Identität und die Komplexgleichung in der allgemeineren Form:

$$\sum_1^6{}^i a_i x_i^2 = 0 \text{ und } \sum_1^6{}^i \frac{a_i x_i^2}{k_i - \lambda} = 0;$$

hiedurch verwandelt sich die erste kanonische Form in:

$$J = a_1 x_1^2 + \cdots + (a_5 + a_6) x_5^2 + 2 a_6 \varepsilon x_5 x_6 + \varepsilon^2 a_6 x_6^2 = 0$$

und

$$\eta = \frac{a_1 x_1^2}{k_1 - \lambda} + \cdots + \frac{(a_5 + a_6) x_5^2}{k_5 - \lambda} + \frac{2 a_6 \varepsilon x_5 x_6}{k_5 - \lambda}$$
$$+ \frac{\varepsilon a_6 x_5^2}{(k_5 - \lambda)^2} + \varepsilon^2 \cdot (\sim) = 0,$$

welche Ausdrücke die Gestalt der zweiten kanonischen Form annehmen, sobald man ε gegen Null abnehmen lässt und

$$a_5 + a_6 = 0, \; a_6 \varepsilon = 1, \; a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$$

festsetzt, auch $\Sigma a_i \, d x_i^2$ und die M_i gehen dabei einfach in die neuen Formen über.

Da die λ bei dieser Substitution nicht verändert werden, so bleiben alle Verhältnisse bezüglich derselben, wie sie von Klein für den „allgemeinen“ Fall angegeben sind; es ändern sich nur die Koordinaten x, und ganz besonders die Fundamentalkomplexe, von denen hier zwei zusammengefallen sind; auch für die folgenden Gattungen wird sich ähnliches zeigen.

[1]) Vgl. Clebsch-Lindemann, Geometrie II, 1, p. 303.

[2]) Bôcher, „Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie“, gekrönte Preisschrift, Göttingen 1890.

8. Fall [111(12)] liefert: 8. [111(12)]

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_4^2 + 2\,x_5\,x_6}{k_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{(k_4-\lambda)^2}$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,(\lambda-\lambda_3)\,\psi}{(k_1-\lambda)\,(k_2-\lambda)\,(k_3-\lambda)\,(k_4-\lambda)^2} = 0$$

mit der Parameterdarstellung:

$$\sigma\,x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)\,(k_1-\lambda_2)\,(k_1-\lambda_3)}{(k_2-k_1)\,(k_3-k_1)\,(k_4-k_1)^2},\ \text{ebenso}\ \sigma\,x_2^2;\ \sigma\,x_3^2,$$

$$\sigma\,x_5^2 = \frac{(k_4-\lambda_1)\,(k_4-\lambda_2)\,(k_4-\lambda_3)}{(k_1-k_4)\,(k_2-k_4)\,(k_3-k_4)} = A_4,$$

$$\sigma\,(x_4^2 + 2\,x_5\,x_6) = -\frac{\partial\,A_4}{\partial\,k_4} = A_4 \cdot A,$$

$$A = -\left(\frac{1}{k_4-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{k_1-k_4} + \cdots\right).$$

Allen Komplexen der Schar ist die Gerade $(0,0,0,0,0,1)$, die Achse des speziellen Komplexes $x_5 = 0$, gemeinsam. Als vierten, eine beliebige Raumgerade festlegenden Komplex haben wir $x_4 = \lambda_4 \cdot x_5$. Die Bedingung der involutorischen Lage $a_1\,b_1 + \cdots + a_5\,b_6 + a_6\,b_5 = 0$ ist für ihn und den Tangentialkomplex von λ erfüllt, da

$$a_1 = \frac{x_1}{k_1-\lambda},\ \cdots\ a_4 = \frac{x_4}{k_4-\lambda},\ a_5 = \frac{x_5}{k_4-\lambda},\ a_6 = \frac{x_6}{k_4-\lambda} + \frac{x_5}{(k_4-\lambda)^2};$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_5 = 0,\ b_4 = 1,\ b_6 = -\lambda_4$$

zu setzen sind.

Die geometrische Bedeutung des neuen Komplexes erhellt aus folgendem:

Eine Gerade t, für die $\lambda_1 = \lambda_2 = k_4$ ist, schneidet die Doppelgerade und gehört wegen $\sigma\,(x_4^2 + 2\,x_5\,x_6) = 0$ auch dem Komplexe $x_4 = 0$ an, also der „speziellen“ Kongruenz:[1])

[1]) Klein, Differentialgleichungen in der Liniengeometrie, p. 282.

$x_4 - \lambda x_5 = 0$. Dass sich die Leitgeraden dieser Kongruenz vereinigen, charakterisiert die Achse von $x_5 = 0$ als „doppelte Doppelgerade“. Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Gerade t, sie liegt ganz in der Fläche.

Die Zuordnung der Schnittpunkte und Tangentialebenen $(g\,t)$ einer beliebigen Linie g kann nun in derselben Weise geschehen wie im Falle 1. Es ist ferner:

$$\sigma x_4^2 = \lambda_4^2 \cdot \sigma x_5^2 = \lambda_4^2 \cdot A_4,\ 2\,\sigma x_5 x_6 = A_4 a_6,\ \sigma x_6^2 = \tfrac{1}{4} A_4 a_6^2,$$

wo $a_6 = A - \lambda_4^2$; die Differentialgleichung wird:

$$S^2 (d x_i) = \sum_1^4{}^i M_i\, d\lambda_i^2,$$

$$M_1 = \frac{x_1^2}{(k_1 - \lambda_1)^2} + \cdots + \frac{x_4^2 + 2 x_5 x_6}{(k_4 - \lambda_1)^2} + \frac{4 x_5 x_6}{(A - \lambda_4^2)(k_4 - \lambda_1)^3}$$

$$= \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\psi}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_1)^2},$$

ebenso M_2 und M_3,

$$M_4 = \frac{4 x_4^2}{\lambda_4^2} = \frac{4 (k_4 - \lambda_1)(k_4 - \lambda_2)(k_4 - \lambda_3)\psi}{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4)}.$$

Wie bei Fall 1. ist wieder eine Haupttangentenkurve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ beliebig, $\lambda_4 = \text{const}$, die andere $\lambda_1 = \lambda_2 = k_4$, $\lambda_3 = \text{const}$, λ_4 beliebig. Endlich ist

$$W = \sum_1^3{}^i \int \varphi_i\, d\lambda_i + \frac{2\sqrt{-(k_4 - a)(k_4 - b)}}{\sqrt{(k_1 - k_4)(k_2 - k_4)(k_3 - k_4)}} \cdot \lambda_4 + C,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{1}{k_4 - \lambda_i} \sqrt{\frac{(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)}{(k_1 - \lambda_i) \cdots (k_4 - \lambda_i)}}.$$

9 [11(11)2] **9.** Der nächste Fall [11(11)2] mit

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2 + x_4^2}{k_3 - \lambda} + \frac{2 x_5 x_6}{k_4 - \lambda} + \frac{x_5^2}{(k_4 - \lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_3 - \lambda)(k_4 - \lambda)^2}$$

bietet nur die einfache Verknüpfung der Fälle 1 und 7.

Die drei Doppelgeraden sind $(0, 0, 1, i, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -i, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$; [1]) die windschiefen ersten beiden werden von der dritten, sowie von deren adjungierter Geraden $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ getroffen.

Die Zuordnung der Schnittpunkte und Tangentialebenen ist die gleiche wie bei 1. Als vierten involutorischen Komplex hat man ϑ, er stützt sich auf die Geraden der Fläche; so ist:

$$x_3 = r\cos\vartheta,\quad x_4 = r\sin\vartheta,\quad \sigma r^2 = \frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)(k_3-\lambda_3)}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)(k_4-k_3)^2}.$$

Man hat hier ferner:

$$S^2(dx_i) = \sum_1^3{}^i M_i\, d\lambda_i^2 + 4r^2\, d\vartheta^2,$$

wo $M_i = \chi(\lambda_i)$, und

$$W = \sum_1^3{}^i \int \varphi_i\, d\lambda_i + \frac{2\sqrt{-(k_3-a)(k_3-b)}}{\sqrt{(k_1-k_3)(k_2-k_3)(k_4-k_3)}}\cdot\vartheta + C,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{1}{(k_3-\lambda_i)(k_4-\lambda_i)}\sqrt{\frac{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}{(k_1-\lambda_i)(k_2-\lambda_i)}}.$$

10. In [11(112)] ist 10. [11(112)]

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2+x_4^2+2x_5x_6}{k_3-\lambda} + \frac{x_5^2}{(k_3-\lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_3-\lambda)^2},$$

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)^2},\quad \text{analog } \sigma x_2^2,$$

$$\sigma x_5^2 = \frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)} = A_3,$$

$$\sigma(x_3^2+x_4^2+2x_5x_6) = A_3 A;\quad A = -\left(\frac{1}{k_3-\lambda_1}+\cdot+\frac{1}{k_1-k_3}+\cdot\right).$$

[1]) Vgl. Plücker a. a. O. Nr. 344, III.

Mit

$$x_1 = p_{12} + p_{34} = 0, \quad x_2 = \frac{1}{i}(p_{12} - p_{34}) = 0, \quad x_5 = p_{14} = 0$$

tritt wieder eine Schar von Doppelgeraden auf, die eine Erzeugung einer Fläche zweiten Grades; diese zerfällt aber hier als Ordnungsfläche in 2 Ebenen E_1 und E_4 und als Klassenfläche in 2 Punkte der Schnittlinie S_2 und S_3. Doppelgerade sind der Büschel des Punktes S_2 in Ebene E_1 und der von S_3 in E_4: Direktrizen bilden Büschel S_2 in E_4 und S_3 in E_1. Unter diesen letzteren tragen 4 Gerade als singuläre Direktrizen r die singulären Punkte und Ebenen der Komplexe; wie im Falle 2 erhält man ihre Koordinaten für

$$\lambda_1 = \lambda_2 = k_3: \qquad \sigma x_1^2 = \frac{1}{k_2 - k_1}, \quad \sigma x_2^2 = \frac{1}{k_1 - k_2},$$

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0, \quad \sigma x_6^2 = \left(\frac{A_3\, A^2}{4}\right)_{\lambda_1 = \lambda_2 = k_3} = \frac{1}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}$$

Hiemit übereinstimmend gibt Segre für unseren Komplex, den wir zu schreiben haben:

$$x_1^2 \cdot \frac{(k_3 - k_1)(k_3 - \lambda)}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2 (k_3 - k_2)(k_3 - \lambda)}{k_2 - \lambda} + x_5^2 = 0,$$

die Werte an:

$$x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 : x_4^2 : x_5^2 : x_6^2 = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) : \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) : 0 : 0 : 0 : (\lambda_2 - \lambda_1)^2$$

$$= (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_2 - k_1) : (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_1 - k_2) : 0 : 0 : 0 : (k_1 - k_2)^2.$$

Die singulären Linien eines beliebigen Komplexes $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, für welche sich verhalten

$$x_1^2 : x_2^2 : x_5^2 = \frac{(k_1 - \lambda)^2}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)^2} : \frac{(k_2 - \lambda)^2}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)^2} : \frac{(k_3 - \lambda)^2}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}$$

schneiden je eine der 4 singulären Direktrizen r und die zugehörige r', für letztere gilt:

$$x_1^2 : x_2^2 : x_6^2 = \Delta : -\Delta : [(k_2 - \lambda)(k_3 - k_1) + (k_1 - \lambda)(k_3 - k_2)],$$

wenn $\Delta = (k_3 - k_2)(k_3 - k_1)(k_1 - k_2)(k_3 - \lambda)^2$.

Die Konstruktion eines quadratischen Komplexes λ ist genau die gleiche wie im Falle 2; nur ist der von der Singularitätenfläche bestimmte Grundkegelschnitt des in einer Ebene liegenden Büschels in die Schnittlinien mit E_1 und E_4 zerfallen. Als Hilfskomplexe zur Einführung der elliptischen Koordinaten nehmen wir λ_3 und ϑ:

$$x_3 = r\cos\vartheta,\ x_4 = r\sin\vartheta,\ r^2 = x_3^2 + x_4^2 = \lambda_3^2 x_5^2;$$

λ_3 ist ein quadratischer Komplex der Form [1(11)(111)], wobei x_5 ein spezieller linearer Komplex ist, was aber der weiteren Betrachtung keinen Eintrag tut; ϑ ist ein linearer Komplex, der die Kongruenz der Leitgeraden $S_1 S_3$ und $S_2 S_4$ enthält.

So folgt:

$$2\sigma x_5 x_6 = A_3 a_6,\ \sigma x_6^2 = \tfrac{1}{4} A_3 a_6^2,\ a_6 = A - \lambda_3^2,$$

$$S^2(d x_i) = \sum_1^3{}^i M_i\, d\lambda_i^2 + M_4\, d\vartheta^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\psi}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)^2},\ M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = \frac{4(x_3^2 + x_4^2)}{\lambda_3^2} = 4x_5^2 = \frac{4(k_3 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_2)\psi}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)},$$

$$M_4 = 4r^2 = \lambda_3^2 \cdot M_3,$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{k_3 - \lambda_1} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1 - a}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)}} + \int \varphi_2\, d\lambda_2$$

$$+ \frac{2\sqrt{a - k_3}}{\sqrt{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}} \cdot \int \sqrt{1 - \frac{b}{\lambda_3^2(a - k_3)}}\, d\lambda_3 + \frac{2\vartheta\sqrt{b}}{\sqrt{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}} + C.$$

11. [1(11)(12)] **11.** Für [1(11)(12)] ist

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2+x_3^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_4^2+2x_5x_6}{k_3-\lambda} + \frac{x_5^2}{(k_3-\lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_3-\lambda)^2},$$

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)^2},\quad \sigma r^2 = \sigma(x_2^2+x_3^2) = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)}{(k_1-k_2)(k_3-k_2)^2},$$

$$\sigma x_5^2 = \frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)} = A_3,\quad \sigma(x_4^2+2x_5x_6) = A_3\cdot A,$$

$$A = -\left(\frac{1}{k_3-\lambda_1}+\frac{1}{k_3-\lambda_2}+\frac{1}{k_1-k_3}+\frac{1}{k_2-k_3}\right).$$

Durch einen beliebigen Punkt der aus zwei sich berührenden F_2 bestehenden Singularitätenfläche geht eine Gerade der Fläche $\lambda_1=\lambda_2=k_2$, welche die Direktrizen von $x_2=0$, $x_3=0$ trifft und eine Flächenerzeugende $\lambda_1=\lambda_2=k_3$, welche die Achse von $x_5=0$ schneidet und zu der speziellen Kongruenz $x_4=0$, $x_5=0$ zählt. Die Zuordnung von Schnittpunkten und Tangentialebenen geschieht wie im Falle 3; als Hilfskomplexe dienen ϑ und λ_4: $x_3=r\cos\vartheta$, $x_4=r\sin\vartheta$, $x_4=\lambda_4 x_5$; ihre Bedeutung ist uns bekannt. Es wird

$$\sigma x_6^2 = \tfrac{1}{4}A_3(A-\lambda_3^2)^2,$$

$$S^2(dx_i) = M_1\,d\lambda_1^2 + M_2\,d\lambda_2^2 + M_3\,d\vartheta^2 + M_4\,d\lambda_4^2,$$

$$M_1 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)^2},\ \text{ebenso } M_2.\ M_3=r^2,\ M_4=A_3\psi,$$

$$W = \int\varphi_1\,d\lambda_1 + \int\varphi_2\,d\lambda_2 + \frac{2\vartheta}{k_3-k_2}\cdot\sqrt{\frac{-(k_2-a)(k_2-b)}{(k_1-k_2)(k_3-k_2)}}$$

$$+\frac{2\lambda_4}{k_2-k_3}\sqrt{\frac{-(k_3-a)(k_3-b)}{k_1-k_3}}+C,\ \varphi_1=\int\frac{d\lambda_1}{(k_2-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)}\sqrt{\frac{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)}{(k_1-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)}}.$$

12. Der Fall [1(111)2] erinnert wieder an den Fall 2. 12. [1(111)2] Es ist

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2+x_3^2+x_4^2}{k_2-\lambda} + \frac{2\,x_5\,x_6}{k_3-\lambda} + \frac{x_5^2}{(k_3-\lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\,\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_3-\lambda)^2};$$

$$\sigma\,x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)^2},\quad \sigma(x_2^2+x_3^2+x_4^2) = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)}{(k_1-k_2)(k_3-k_2)^2},$$

$$\sigma\,x_5^2 = \frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)},\quad 2\,\sigma\,x_5\,x_6 = A_3\cdot A,\quad \sigma\,x_6^2 = \tfrac{1}{4}\,A_3\cdot A^2,$$

$$A = -\left(\frac{1}{k_3-\lambda_1} + \frac{1}{k_3-\lambda_2} + \frac{1}{k_1-k_3} + \frac{1}{k_2-k_3}\right).$$

Unter der Regelschar von Doppelgeraden: $x_1 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ befindet sich jetzt eine ausgezeichnete Gerade, die Leitgerade von $x_5 = 0$. Ihre Treffgeraden sind, wenn sie zugleich die Fläche berühren, sämtlich singuläre Linien für alle Komplexe; es kann somit jene Gerade als doppelte singuläre Direktrix r gelten, mit der sich die zugehörige Direktrix r' vereinigt hat. Die beiden anderen singulären Direktrizen r finden sich wieder für $\lambda_1 = \lambda_2 = k_2$:

$$x_1' : x_5' : x_6' = \pm\frac{\sqrt{k_2-k_1}}{k_3-k_1} : +\sqrt{\frac{k_2-k_3}{k_1-k_3}}$$

$$: +\sqrt{\frac{k_2-k_3}{k_1-k_3}}\cdot\frac{k_1-k_2}{2\,(k_1-k_3)\,(k_2-k_3)},\quad x_2' = x_3' = x_4' = 0.$$

Nach Segres Methode hätte man sie durch folgende Ueberlegung finden können: Für jeden Punkt der Singularitätenfläche: $z_1\,z_2 - z_3\,z_4 = 0$ zerfällt der Komplexkegel in zwei Ebenen; diese decken sich insbesondere für die Punkte gewisser Geraden der Schar $z_1 = \mu\,z_3$, $z_4 = \mu\,z_2$. Man erhält für diese Geraden $\mu^2 = 0$, d. h. $z_1 = 0$, $z_4 = 0$ doppelt zählend und $\mu = +\sqrt{\frac{4\,\lambda_5\,(\lambda_5-\lambda_1)}{\lambda_1}}$, was wieder auf obige Koordinaten führt. Für die Leitgeraden r' gilt:

$$x_1'' : x_5'' : x_6'' = \mp k'' : -1 : \tfrac{1}{2} k''^2, \quad x_2'' = x_3'' = x_4'' = 0,$$

wobei $k' = A \cdot \sqrt{\dfrac{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}{k_2 - k_1}}$ u. $A = -\left(\dfrac{2}{k_3 - \lambda} + \dfrac{1}{k_1 - k_3} + \dfrac{1}{k_2 - k_3}\right)$,

je eine Gerade r und r' wird von den singulären Linien eines beliebigen Komplexes λ getroffen; für die Koordinaten der letzteren ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, also:

$$x_1 : x_5 : x_6 = \pm \frac{k_1 - \lambda}{\sqrt{k_2 - k_1}\,(k_3 - k_1)}$$

$$: + \frac{k_3 - \lambda}{\sqrt{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}} : \frac{k_3 - \lambda}{\sqrt{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)}} \cdot \frac{A}{2}.$$

Eine vorgegebene Raumgerade g bestimmt eine lineare Kongruenz mit denjenigen zwei Direktrizen, welche sie schneidet, als Leitgeraden. In einer beliebigen Ebene hat man nun die Gerade aus dieser Kongruenz, die Durchschnittpunkte mit den zwei Direktrizen r und den mit der ausgezeichneten Geraden nebst seiner Flächentangente als Elemente des Komplexkegelschnittes, der so mit zwei Möglichkeiten bestimmt ist. Die Konstruktion führt also auf die von Segre zitierte Kegelschnitt-Aufgabe.

Mittels der Hilfskomplexe ϑ und ζ:

$$x_2 = r \cos\vartheta, \quad x_3 = r \sin\vartheta \cos\zeta, \quad x_4 = r \sin\vartheta \sin\zeta$$

bekommen wir:

$$S^2(dx_i) = M_1\, d\lambda_1^2 + M_2\, d\lambda_2^2 + M_3\, d\vartheta^2 + M_4\, d\zeta^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)^2}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = 4r^2 = \frac{4(k_2 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)^2}, \quad M_4 = r^2 \sin^2\vartheta,$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_2 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_1)} \sqrt{\frac{\lambda_1 - a}{k_1 - \lambda_1}} + \int \varphi_2\, d\lambda_2 + \frac{2\sqrt{a - k_2}}{(k_3 - k_2)\sqrt{k_1 - k_2}}$$

$$\cdot \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} \sqrt{\sin^2\vartheta - \frac{c}{a - k_2}} + \frac{2\sqrt{c}}{(k_3 - k_2)\sqrt{k_1 - k_2}}\,\zeta + C.$$

13. Fall [(11)(11)2] gibt: 13. [(11)(11)2]

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_3^2 + x_4^2}{k_2 - \lambda} + \frac{2\,x_5 x_6}{k_3 - \lambda} + \frac{x_5^2}{(k_3 - \lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_3 - \lambda)^2},\ \sigma(x_1^2 + x_2^2) = \sigma r^2 = \frac{(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)^2},$$

$$\sigma(x_3^2 + x_4^2) = \sigma r'^2 = \frac{(k_2 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)^2},\ \sigma x_5^2 = \frac{(k_3 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_2)}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)} = A_3,$$

$$2\,\sigma\, x_5 x_6 = A_3 A,\ A = -\left(\frac{1}{k_3 - \lambda_1} + \frac{1}{k_3 - \lambda_2} + \frac{1}{k_1 - k_3} + \frac{1}{k_2 - k_3}\right).$$

Die Singularitätenfläche[1]) löst sich in eine Fläche zweiten Grades, zwei Tangentialebenen α und β und die Punkte C_1 und C_2 auf, wenn die Fläche α in $C_1 B_0$ und $C_2 B_0$, β in $C_1 A_0$ und $C_2 A_0$ schneidet. Ist eine Gerade g gegeben, so ist dadurch eine Korrelation festgelegt, dass man ihre Durchstosspunkte P_1 und P_2 mit α und β einander als konjugierte zuweist, dem Punkte P_1 den Schnitt einer Tangentialebene durch g, der Kante $C_1 C_2$ als Geraden von α bezw. β die Punkte A_0 bezw. B_0, und auf ihr C_1 und C_2 sich selbst entsprechen lässt. Konjugierte Punkte liefern als Verbindungslinien Gerade des Komplexes λ, der so auf doppelte Art durch g bestimmt ist. Ein Komplex λ ordnet folglich dem Punkte P_1 die allgemeine Tangentialebene T_1 zu, dem Punkte Q_1 dagegen, in dem g die F_2 trifft, die Ebene durch C_1 oder C_2. Q_1 und T_1 entsprechen einander durch einen linearen Komplex ϑ oder η: $x_1 = r\cos\vartheta$, $x_2 = r\sin\vartheta$, $x_3 = r'\cos\eta$, $x_4 = r'\sin\eta$; durch Q_1 geht nämlich eine Gerade h der Kongruenz $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, welche $C_1 A_0$ und $C_2 B_0$ schneidet, und $(g\,h)$ ist als allgemeine Tangentialebene mit einer der vorerwähnten Tangentialebenen, etwa T_1 identisch.

---

[1]) Hirst a. a. O.; die Fläche tritt auch als „Komplexfläche“ auf (Plücker, neue Geometrie Nr. 344, VII), wenn man beim allgemeinen Fall die Verbindungslinie zweier Doppelpunkte C_1, C_2 als Leitgerade wählt.

Die Differentialgleichung und ihre Lösung schreiben sich:

$$S^2\,(d\,x_i) = M_1\,d\,\lambda_1^2 + M_2\,d\,\lambda_2^2 + M_3\,d\,\vartheta^2 + M_4\,d\,\eta^2,$$

$$M_1 = \chi\,(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - \lambda_1)\,(k_2 - \lambda_1)\,(k_3 - \lambda_1)^2},\quad M_2 = \chi\,(\lambda_2),$$

$$M_3 = 4\,r^2,\quad M_4 = 4\,r'^2,$$

$$W = \int \frac{d\,\lambda_1}{(k_1 - \lambda_1)\,(k_2 - \lambda_1)\,(k_3 - \lambda_1)} \cdot \sqrt{(\lambda_1 - a)\,(\lambda_1 - b)}$$

$$+ \int \varphi_2\,d\,\lambda_2 + K_1\,\vartheta + K_2\,\zeta + C,\ \text{wo}\ K_i = \frac{2\sqrt{-(k_i - a)\,(k_i - b)}}{(k_j - k_i)\,(k_3 - k_i)}.$$

14. [(11)(112)] **14.** Fall [(11)(112)] mit der Komplexgleichung:

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_3^2 + x_4^2 + 2\,x_5 x_6}{k_3 - \lambda} + \frac{x_5^2}{(k_3 - \lambda)^2} = 0 = \frac{\lambda - \lambda_1}{(k_1 - \lambda)\,(k_3 - \lambda)^2}$$

und der Parameterdarstellung:

$$\sigma\,(x_1^2 + x_2^2) = \frac{k_1 - \lambda_1}{(k_3 - k_1)^2},\quad \sigma\,x_5^2 = \frac{k_3 - \lambda_1}{k_1 - k_3} = A_3,$$

$$\sigma\,(x_3^2 + x_4^2 + 2\,x_5\,x_6) = A_3\,A,\quad A = -\left(\frac{1}{k_3 - \lambda_1} + \frac{1}{k_1 - k_3}\right)$$

hat zunächst die gleiche Singularitätenfläche wie Fall 10; während jedoch dort noch 4 singuläre Direktrizen auftraten, sind hier nur 2 vorhanden: $(1, \pm i, 0, 0, 0, 0)$, die Geraden $S_1\,S_2$ und $S_3\,S_4$, wie mittels der Segreschen Methode oder aus den Formeln von Fall 10 für $k_1 = k_2$ zu ersehen ist. Der Komplexkegelschnitt einer Ebene muss die vorgegebene g berühren und in den Schnittpunkten von $S_1\,S_2$ und $S_3\,S_4$ die beiden Ebenen α und β: $y_1 = 0$ und $y_4 = 0$. Die eindeutig bestimmte Aufgabe läuft, wie ersichtlich, auf die Kegelschnittkonstruktion hinaus, die Segre dafür anführt. Als Hilfskomplexe führen wir ein λ_2, η und ϑ: $x_1 = r\cos\eta$, $x_2 = r\sin\eta$, $r'^2 = x_3^2 + x_4^2 = \lambda_2^2\,x_5^2$, $x_3 = r'\cos\vartheta$, $x_4 = r'\sin\vartheta$ und haben:

$$S^2(dx_i) = M_1 d\lambda_1^2 + M_2 d\lambda_2^2 + M_3 d\eta^2 + M_4 d\vartheta^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)^2},\ M_2 = 4\frac{x_3^2+x_4^2}{\lambda_2^2} = \frac{4(k_3-\lambda_1)\psi}{k_1-k_3},$$

$$M_3 = 4r^2 = \frac{4(k_1-\lambda_1)}{(k_3-k_1)^2},\ M_4 = 4r'^2 = \frac{4(k_3-\lambda_1)\lambda_2^2\psi}{k_1-k_3},$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_1-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)} \sqrt{\frac{\lambda_1-a}{k_3-\lambda_1}} + \frac{2}{\sqrt{k_1-k_3}} \int \sqrt{\frac{k_3-a}{k_3-k_1} - \frac{b}{\lambda_2^2}}\, d\lambda_2$$

$$+ \frac{2\eta}{k_1-k_3} \cdot \sqrt{\frac{k_1-a}{k_1-k_3}} + 2\zeta \cdot \sqrt{\frac{b}{k_1-k_3}} + C.$$

15. Für [(111)(12)] ist: 15. [(111)(12)]

$$\varphi = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_4^2+2x_5x_6}{k_2-\lambda} + \frac{x_5^2}{(k_2-\lambda)^2} = 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)^2};$$

$$\sigma(x_1^2+x_2^2+x_3^2) = \sigma r^2 = \frac{k_1-\lambda_1}{(k_2-k_1)^2},\quad \sigma x_5^2 = \frac{k_2-\lambda_1}{k_1-k_2} = A_2,$$

$$\sigma(x_4^2+2x_5x_6) = A_2 A,\ A = -\left(\frac{1}{k_2-\lambda_1} + \frac{1}{k_1-k_2}\right).$$

Die Singularitätenfläche ist wieder die F_2: $y_1 y_3 - y_2 y_4 = 0$, doppelt zählend. Die Geraden $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ bilden die Schar der Komplexdoppelgeraden, $x_1 = 0 = x_2 = x_3$ die der Direktrizen. An die Stelle der 4 singulären Direktrizen tritt hier die einzige Achse von $x_5 = 0$, denn diejenigen ihrer Treffgeraden, welche zugleich $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 = x_4^2 + 2x_5x_6$ erfüllen, d. h. die Fläche berühren, befriedigen $\varphi = 0$ und $\chi = 0$ doppelt. Der Komplexkegelschnitt in einer beliebigen Ebene hat im Schnittpunkte mit der Achse von $x_5 = 0$ eine vierpunktige Berührung mit der Fläche. Unter dieser Bedingung kann natürlich eine gegebene Gerade nur einem Komplexe λ

angehören; die Konstruktion seiner Kegelschnitte ist mit der von Segre angeführten Aufgabe identisch.[1])

Die Hilfskomplexe λ_2, ϑ, ζ führen wir ein wie immer:

$$x_4 = \lambda_2 x_5,\ x_1 = r\cos\vartheta,\ x_2 = r\sin\vartheta\cos\zeta,\ x_3 = r\sin\vartheta\sin\zeta$$

und berechnen:

$$S^2(dx_i) = M_1 d\lambda_1^2 + M_2 d\lambda_2^2 + M_3 d\vartheta^2 + M_4 d\zeta^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)^2},\ M_2 = 4\frac{x_4^2}{\lambda_2^2} = \frac{4(k_2-\lambda_1)\psi}{k_1-k_2},$$

$$M_3 = 4r^2 = \frac{4(k_1-\lambda_1)}{(k_2-k_1)^2},\ M_4 = 4r^2\sin^2\vartheta.$$

$$W = \int\frac{d\lambda_1}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)}\cdot\sqrt{\frac{\lambda_1-a}{k_2-\lambda_1}} + \frac{2\lambda_2\sqrt{a-k_2}}{k_1-k_2}$$

$$+\frac{2\sqrt{a-k_1}}{\sqrt{(k_2-k_1)^3}}\cdot\int\sqrt{1-\frac{(k_2-k_1)c}{(a-k_1)\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta + \frac{2\sqrt{c}}{k_2-k_1}\cdot\zeta + C.$$

III. Kanonische Form [1113].

Die Gleichungen der dritten kanonischen Form lauten:

$$P = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_5^2 + 2y_4y_6 = 0$$

$$\Omega = k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + k_3y_3^2 + k_4(y_5^2 + 2y_4y_6) - 2y_4y_5 = 0$$

$$\Omega' = k_1^2y_1^2 + k_2^2y_2^2 + k_3^2y_3^2 + k_4^2(y_5^2 + 2y_4y_6) - 4k_4y_4y_5 + y_4^2 = 0.$$

Wie bei der zweiten kanonischen Form, führen wir auch hier die Koordinaten der y zugeordneten Linie x ein:

$$\varrho x_1 = (k_1-\lambda)y_1,\ \varrho x_2 = (k_2-\lambda)y_2,\ \varrho x_3 = (k_3-\lambda)y_3,$$

$$\varrho x_4 = (k_4-\lambda)y_4,\ \varrho x_5 = (k_4-\lambda)y_5 - y_4,\ \varrho x_6 = (k_4-\lambda)y_6 - y_5.$$

[1]) Die Lösung der Kegelschnittaufgabe findet sich bei Salmon, Kegelschnitte, 2. Teil, Nr. 301, Beispiel 17.

Es wird dadurch:

$$P = O = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{x_3^2}{(k_3-\lambda)^2} + \frac{x_5^2 + 2x_4x_6}{(k_4-\lambda)^2} + \frac{4x_4x_5}{(k_4-\lambda)^3} + \frac{3x_4^2}{(k_4-\lambda)^4} = \chi$$

$$\Omega - \lambda P = O = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_5^2+2x_4x_6}{k_4-\lambda} + \frac{2x_4x_5}{(k_4-\lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_4-\lambda)^3} = \varphi$$

$$\Omega' - 2\lambda\Omega + \lambda^2 P = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + 2x_4x_6 = O = J.$$

16. Für den ersten Fall [1113] dieser Form folgt aus: 16. [1113]

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{k_3-\lambda} + \frac{x_5^2+2x_4x_6}{k_4-\lambda} + \frac{2x_4x_5}{(k_4-\lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_4-\lambda)^3} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_3-\lambda)(k_4-\lambda)^3}$$

die Koordinatendarstellung:

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)(k_1-\lambda_4)}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_4-k_1)^3},$$

ebenso σx_2^2 und σx_3^2,

$$\sigma x_4^2 = \frac{(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)(k_4-\lambda_3)(k_4-\lambda_4)}{(k_1-k_4)(k_2-k_4)(k_3-k_4)} = A_4,$$

$$2\sigma x_4x_5 = -\frac{\partial A_4}{\partial k_4} = A_4 \cdot \alpha_5,\ \alpha_5 = -\left(\frac{1}{k_4-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{k_4-k_4} + \cdot\cdot\right).$$

$$\sigma x_5^2 = \frac{1}{4} A_4 \cdot \alpha_5^2,$$

$$\sigma(x_5^2 + 2x_4x_6) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A_4}{\partial k_4^2} = A_4 \cdot A'.$$

$$A' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(k_4-\lambda_1)^2} - \frac{1}{(k_4-\lambda_2)^2} - \cdots + \frac{1}{(k_1-k_4)^2} + \cdots + \alpha_5^2\right)$$

$$= \frac{1}{(k_4-\lambda_1)(k_4-\lambda_2)} + \cdots 6 \cdots + \frac{1}{(k_4-\lambda_1)(k_1-k_4)} + \cdots 12 \cdots$$

$$+ \frac{1}{(k_1-k_4)(k_2-k_4)} + \cdots + \frac{1}{(k_1-k_4)^2} + \cdots$$

(Die Zahlen deuten an, wie viele Glieder der bezeichneten Art es sind, die Punkte ohne beigefügte Zahlen markieren die nicht geschriebenen Glieder.)

$$\sigma\, x_6^2 = \tfrac{1}{4} A_4 \cdot \alpha_6^2, \quad \alpha_6 = A' - \tfrac{1}{4}\alpha_5^2.$$

Die Singularitätenfläche ist die Komplexfläche des allgemeinen Falles für eine Komplexlinie als Leitgerade.[1])

Doppelgerade, hier Rückkehrkante, ist die Achse des speziellen Komplexes $x_4 = 0$ (0, 0, 0, 0, 0, 1), sie gehört allen Komplexen der Schar an. $\lambda = k_4$ gibt den Komplex ihrer Treffgeraden, $\lambda_1 = \lambda_2 = k_4$ charakterisiert die in der Meridianebene durch den Berührungspunkt ihres Kegelschnittes laufenden Linien, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k_4$ die Geraden in den vier singulären Punkten und Ebenen, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = k_4$ die 4 Geraden der Fläche, welche je 2 Doppelpunkte tragen, wovon jedoch der eine mit dem singulären Punkt auf der Rückkehrkante zusammengefallen ist, und die 4 singulären Achsen, die Schnittlinien je zweier Doppelebenen, von denen eine sich mit der singulären Ebene deckt.

Die Geraden des Raumes gruppieren sich wieder zu 16, Punkte und Ebenen zu 8; im übrigen gelten die Ueberlegungen des allgemeinen Falles, wie sie Klein darlegt.

Durch logarithmische Differentiation ergibt sich:

[1]) Plücker a. a. O. Nr. 225—230.

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{d\lambda_1}{k_1-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_1-\lambda_2} - \frac{d\lambda_3}{k_1-\lambda_3} - \frac{d\lambda_4}{k_1-\lambda_4}, \text{ u. s. f.,}$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_4}{x_4} = -\frac{d\lambda_1}{k_4-\lambda_1} - \frac{d\lambda_2}{k_4-\lambda_2} - \frac{d\lambda_3}{k_4-\lambda_3} - \frac{d\lambda_4}{k_4-\lambda_4},$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_5}{x_5} = -\frac{d\lambda_1}{k_4-\lambda_1} - \cdots - \frac{d\lambda_1}{(k_4-\lambda_1)^2}\cdot\frac{2}{\alpha_5} - \cdots$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_6}{x_6} = -\frac{d\lambda_1}{k_4-\lambda_1} - \frac{d\lambda_1}{(k_4-\lambda_1)^2}\cdot\frac{\alpha_5}{\alpha_6} - \frac{d\lambda_1}{(k_4-\lambda_1)^3}\cdot\frac{2}{\alpha_6} \sim,$$

$$S^2(dx_i) = 4\,(dx_1^2 + \cdots + 2\,dx_4\,dx_6 + dx_5^2) = \sum_1^4{}^i M_i\,dx_i^2,$$

$$M_1 = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)^2} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda_1)^2} + \frac{x_3^2}{(k_3-\lambda_1)^2} + \frac{x_5^2+2x_4x_6}{(k_4-\lambda_1)^2} + \frac{2\cdot 2x_4x_5}{(k_4-\lambda_1)^3}$$

$$+ \frac{3x_4^2}{(k_4-\lambda_1)^4} = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)(k_4-\lambda_1)^3}.$$

Die Koeffizienten der doppelten Produkte $2\,d\lambda_i\,d\lambda_k$ heben sich wieder fort; als Gleichung der Integralfläche finden wir:

$$W = \sum_1^4{}^i \int \varphi_i\,d\lambda_i + C = 0,$$

worin

$$\varphi_i = \int \frac{d\lambda_i}{k_4-\lambda_i} \sqrt{\frac{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}{(k_1-\lambda_i)(k_2-\lambda_i)(k_3-\lambda_i)(k_4-\lambda_i)}}.$$

Dass sich das Resultat des allgemeinen Falles nur soweit abändert, als $k_5 = k_6 = k_4$ mit sich bringt, geht aus dem Grenzübergang hervor.

17. Im Falle [11(13)] ist 17. [11(13)]

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2+x_5^2+2x_4x_6}{k_3-\lambda} + \frac{2x_4x_5}{(k_3-\lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_3-\lambda)^3}$$

$$= 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_3-\lambda)^3},$$

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)}, \quad \sigma x_2^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)}{(k_1-k_2)(k_3-k_2)^2},$$

$$\sigma x_4^2 = \frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)(k_3-\lambda_3)}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)} = A_3,$$

$$2\sigma x_4 x_5 = A_3 \cdot \alpha_5 = -\frac{\partial A_3}{\partial k_3}, \quad \alpha_5 = -\left(\frac{1}{k_3-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{k_1-k_3} + \frac{1}{k_2-k_3}\right),$$

$$\sigma(x_3^2 + x_5^2 + 2x_4 x_6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 A_3}{\partial k_3^2} = A_3 \cdot A',$$

$$A' = \frac{1}{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)} + \cdots + \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_3)} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)}$$

$$+ \frac{1}{(k_1-k_3)^2} + \frac{1}{(k_2-k_3)^2}.$$

Als vierten, die beliebige Gerade festlegenden Komplex nehmen wir den zu den anderen involutorischen Komplex $x_3 = \lambda_4 x_4$. Durch jeden Punkt der Fläche geht nämlich wie bei Fall 8 eine Gerade t, gekennzeichnet durch $\lambda_1 = \lambda_2 = k_3$; sie liegt vollständig auf der Fläche, da sie die dreifache Doppelgerade trifft, sie gehört aber auch dem Komplexe $x_3 = 0$ an, denn für $\lambda_1 = \lambda_2 = k_3$ wird $x_4 = 0$, $\sigma x_5^2 = \frac{k_3 - \lambda_3}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)}$, $\sigma(x_3^2 + x_5^2 + 2x_4 x_6) = \frac{k_3-\lambda_3}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)} = \sigma x_5^2$, so dass $\sigma x_3^2 = 0$ wird. Die Zuordnung von Schnittpunkten und Tangentialebenen der Singularitätenfläche wird durch den neuen Komplex λ_4 so bewirkt, dass ein Punkt und die Ebene durch seine Gerade t und durch g einander korrespondieren, wie im Falle 1.

Weiterhin folgt:

$$\sigma x_6^2 = \tfrac{1}{4} A_3 \cdot \alpha_6^2, \quad \alpha_6 = A' - \tfrac{1}{4}\alpha_5^2 - \lambda_4^2,$$

$$S^2(dx_i) = \sum_1^4{}^i M_i \, d\lambda_i^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)^3},\quad M_2 = \chi(\lambda_2),\quad M_3 = \chi(\lambda_3),$$

$$M_4 = \frac{4x_3^2}{\lambda_2^2} = 4x_1^2 = \frac{4(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)(k_3-\lambda_3)\psi}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)},$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_3-\lambda_1)^2}\cdot\sqrt{\frac{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)}} + \int \varphi_2\, d\lambda_2 + \int \varphi_3\, d\lambda_3$$

$$+ 2\lambda_4\cdot\sqrt{\frac{-(k_1-a)(k_1-b)}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)}} + C.$$

18. Fall [1(11)3] stellt wieder eine einfache Kombination von 1 und 16 dar. Der Komplex ist: 18. [1(11)3]

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2+x_3^2}{k_2-\lambda} + \frac{2x_4x_6+x_5^2}{k_3-\lambda} + \frac{2x_4x_5}{(k_3-\lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_3-\lambda)^3} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)(k_3-\lambda)^3};$$

die Linienkoordinaten lassen sich in die Form giessen:

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)^3},\quad \sigma r^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)}{(k_1-k_2)(k_3-k_2)^3},$$

$$\sigma x_4^2 = \frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)(k_3-\lambda_3)}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)} = A_3,\quad 2\sigma x_4 x_5 = A_3\cdot a_5,$$

$$2\sigma x_4 x_6 = A_3(A' - \tfrac{1}{4}a_5^2),$$

a_5 und A' haben genau dieselben Werte wie im vorhergehenden Falle. Als Hilfskomplex steht uns zu Gebote: $x_2 = r\cos\vartheta$, $x_3 = r\sin\vartheta$; alle solchen Komplexe ϑ haben die Geraden der linearen Kongruenz mit den 2 Doppellinien als Leitgeraden gemeinsam, die insbesondere die Erzeugenden der Fläche $\lambda_1 = \lambda_2 = k_2$ umfasst.

Auf dem bekannten Wege gelangt man zu:

$$S^2(dx_i) = \sum_1^3 M_i\, d\lambda_i^2 + M_4\, d\vartheta^2$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)^3},\quad M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = \chi(\lambda_3),\quad M_4 = 4r^2,$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_3-\lambda_1)^2}\cdot\sqrt{\frac{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)}} + \int \varphi_2\, d\lambda_2 + \int \varphi_3\, d\lambda_3$$

$$+ \frac{2\vartheta}{k_3-k_3}\cdot\sqrt{\frac{-(k_2-a)(k_2-b)}{(k_1-k_2)(k_3-k_2)}} + C.$$

19. [1(113)] **19.** Bei [1(113)] erscheint φ in der Form

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2+x_3^2+2x_4x_6+x_5^2}{k_2-\lambda} + \frac{2x_4x_5}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_2-\lambda)^3} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)^3};$$

ferner ist:

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)}{(k_2-k_1)^3},\quad \sigma x_4^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)}{k_1-k_2} = A_2.$$

$$2\sigma x_4 x_5 = -\frac{\partial A_2}{\partial k_2} = A_2\cdot\alpha_5,\ \alpha_5 = -\left(\frac{1}{k_2-\lambda_1}+\frac{1}{k_2-\lambda_2}+\frac{1}{k_1-k_2}\right),$$

$$\sigma(x_2^2+x_3^2+2x_4x_6+x_5^2) = A_2\cdot A',$$

$$A' = \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)}+\frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_2)}+\frac{1}{(k_2-\lambda_2)(k_1-k_2)}+\frac{1}{(k_1-k_2)^2}.$$

Die Singularitätenfläche zerfällt in die zwei Ebenen $y_1^2+y_4^2=0$ und die zwei Punkte ihrer Schnittlinie: $u_2^2+u_3^2=0$. Die eine Schar von Erzeugenden sind Komplexdoppelgerade: $x_1=0$, $x_4=0$, $x_5=0$ und bilden in Ebene I oder $y_1+iy_4=0$ das Büschel $u_2+iu_3=0$ und in Ebene $y_1-iy_4=0=$ II das Büschel $u_2-iu_3=0$; die andere Schar sind Direktrizen, in Ebene I durch $u_2-iu_3=0$ und in Ebene II durch $u_2+iu_3=0$ bestimmt. Die Achse von $x_4=0$ ist beiden Scharen gemeinsam und doppelt als singuläre Direktrix r zu rechnen. Die

zwei anderen[1]) sind $p_{12} : p_{34} : p_{13} : p_{42} : p_{14} : p_{23} = 1 : 1 : +i : +i : 0 : \pm \frac{i}{2(k_2 - k_1)}$, wie nach Segres Methode gefunden ist, in Uebereinstimmung mit obigen Werten für $\lambda_1 = \lambda_2 = k_2$. Es ergibt sich nämlich als Verhältnis der Koordinaten von r: $1:0:0:0:\mp i:\pm\frac{i}{2(k_2-k_1)}$ und für r' $1:0:0:0:\mp i:\mp\frac{i(k_2-4k_1+3\lambda)}{2(k_2-k_1)(k_2-\lambda)}$.

Eine singuläre Linie des Komplexes λ, für die also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ gilt, und deren Koordinaten heissen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6$$

$$= \mp\frac{(k_1-\lambda)i}{k_2-k_1} : \sim : \sim : (k_2-\lambda) : -\frac{1}{2}(k_2-\lambda)\left(\frac{2}{k_2-\lambda}+\frac{1}{k_1-k_2}\right) : \sim,$$

schneidet jedesmal eine Direktrix r und die zugehörige r'.

Doppelgerade des Komplexes sind alle Linien der speziellen Kongruenz $x_1 = 0$, $x_4 = 0$. Will man daher den Kegelschnitt zeichnen für einen Komplex λ, dem eine gegebene Gerade g angehört, so hat man in der Ebene durch g[2]) die Gerade k aus $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ aufzusuchen. Der Kegelschnitt läuft durch die beiden Direktrizenschnittpunkte, berührt k im Schnitt mit der Achse von $x_4 = 0$ und g. So führt die Aufgabe auf das von Segre beigezogene Analogon der ebenen Geometrie.

---

[1]) Nach der von Weiler gewählten Schreibweise müssten die Koordinaten lauten und so wären seine Werte zu korrigieren:

	p_{12}	p_{34}	p_{13}	p_{42}	p_{14}	p_{23}
r_1	1	1	i	i	0	$\frac{i}{2\lambda_1}$
r_2	1	1	$-i$	$-i$	0	$-\frac{i}{2\lambda_1}$
r_1'	1	1	$-i$	$-i$	0	$\frac{3i}{2\lambda_1}$
r_2'	1	1	i	i	0	$-\frac{3i}{2\lambda_1}$

[2]) Hier und bei ähnlichen Fällen im Folgenden sei, der Einfachheit halber, die Ebene, in welcher der Komplexkegelschnitt konstruiert werden soll, gleich durch g selbst gelegt. Für eine beliebige Ebene träte an die Stelle von g die Gerade aus jener Kongruenz, welche g, wie im Falle 2, bestimmt.

Um die Differentialaufgabe zu lösen, setzen wir: $r = \lambda_4 x_4$, $x_2 = r\cos\vartheta$, $x_3 = r\sin\vartheta$ und haben:

$$S^2(dx_i) = M_1\,d\lambda_1^2 + M_2\,d\lambda_2^2 + M_3\,d\vartheta^2 + M_4\,d\lambda_4^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,\psi}{(k_1-\lambda_1)\,(k_2-\lambda_1)^3},\quad M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = 4r^2 = \lambda_4^2\cdot M_4,$$

$$M_4 = 4x_4^2 = \frac{4\,(k_2-\lambda_1)\,(k_2-\lambda_2)\,\psi}{k_1-k_2},$$

$$W = \int\frac{d\lambda_1}{(k_2-\lambda_1)^2}\sqrt{\frac{\lambda_1-a}{k_1-\lambda_1}} + \int\varphi_2\,d\lambda_2 + 2\vartheta\cdot\sqrt{\frac{b}{k_1-k_2}}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{k_1-k_2}}\cdot\int\sqrt{a-k_2-\frac{b}{\lambda_4^2}}\,d\lambda_4 + C.$$

20. [(11)(13)] **20.** Fall [(11)(13)] prägt sich in den Gleichungen aus:

$$\varphi = \frac{x_1^2+x_2^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_3^2+2x_4x_6+x_5^2}{k_2-\lambda} + \frac{2x_4x_5}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_2-\lambda)^3}$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,\psi}{(k_1-\lambda)\,(k_2-\lambda)^3},$$

$$\sigma\,(x_1^2+x_2^2) = \sigma\,r^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)\,(k_1-\lambda_2)}{(k_2-k_1)^3},\quad \sigma\,x_4^2 = A_2,$$

$$2\sigma\,x_4x_5 = A_2\cdot a_5,$$

$$\sigma\,(x_3^2+2x_4x_6+x_5^2) = A_2\cdot A';\ A_2,\ a_5 \text{ und } A' \text{ wie in Fall 19.}$$

$x_1^2+x_2^2=0$ und $x_4=0$ geben Gerade, die allen Komplexen angehören; sie bestimmen zwei Ebenen E_1 $(y_1=0)$ und E_4 $(y_4=0)$ und die Punkte S_2 und S_3 ihrer Schnittlinie. Die Singularitätenfläche löst sich daher auf in diese Gebilde und eine Fläche zweiten Grades, deren Tangenten die Gleichung $x_3^2+2x_4x_6+x_5^2=0$ befriedigen, und auf der S_1S_2 und S_3S_4, die Leitgeraden der Kongruenz $x_1=0$, $x_2=0$, und S_2S_3, die Achse von $x_4=0$, als Erzeugende liegen. Wir haben eine Ausartung von Fall 13 vor uns; wie dort entspringt der Komplex aus einer Korrelation

der Ebenen E_1 und E_4; die Schnittlinie $S_2 S_3$ ist hier als Gerade von E_1 dem Punkt S_2, als Gerade von E_4 dem S_3 zugeordnet, während dem S_2 als Punkt von E_1 die Gerade $S_2 S_1$ und dem S_3 als Punkt von E_4 die Linie $S_3 S_4$ zugehört.

Die Singularitätenfläche und eine Gerade g legen die Korrelation und den Komplex mit zwei Möglichkeiten fest. Eine Ebene durch g schneidet E_1 und E_4 je in einer Geraden; diese beiden und g als Tangenten und die Schnittkurve mit F_2, die doppelt berührt werden muss, bestimmen die Komplexkegelschnitte.[1]) Zugleich aber entsteht eine Korrelation, wenn dem Schnittpunkte von g mit E_1 die Schnittlinie einer der zwei Tangentialebenen von g aus mit E_4 zugewiesen wird.

Die Einführung der Hilfskomplexe geschieht wie in den Fällen 1 und 17 mit der gleichen Bedeutung:

$$x_1 = r\cos\vartheta, \quad x_2 = r\sin\vartheta, \quad x_3 = \lambda_4 x_4,$$
$$2\sigma x_4 x_6 = A_2 (A' - \tfrac{1}{4}\alpha_5^2 - \lambda_4^2).$$

Die Komplexe bewirken eine Zuordnung von Punkten und Tangentialebenen der Geraden g wie im Falle 13; ferner erhalten wir:

$$S^2 (d x_i) = M_1 d\lambda_1^2 + M_2 d\lambda_2^2 + M_3 d\vartheta^2 + M_4 d\lambda_4^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\psi}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)^3}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = 4r^2 = \frac{4(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)\psi}{(k_2 - k_1)^3}, \quad M_4 = \frac{4(k_2 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)\psi}{k_1 - k_2},$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)^2} \cdot \sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)} + \int \varphi_2 d\lambda_2$$
$$+ \frac{2\sqrt{-(k_1 - a)(k_1 - b)}}{(k_2 - k_1)^2} \cdot \vartheta + \frac{2\sqrt{-(k_2 - a)(k_2 - b)}}{k_1 - k_2} \cdot \lambda_4 + C.$$

[1]) Die Aufgabe, einen Kegelschnitt aus drei gegebenen Tangenten und einem doppelt zu berührenden Kegelschnitt K zu konstruieren (Salmon, Kegelschnitte, Nr. 311, Beispiel 5) hat im allgemeinen vier Lösungen, hier nur zwei, da die Geraden sich auf K schneiden. Sie

21. [(111)3] **21.** Fall [(111)3] ist dargestellt durch

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{k_1 - \lambda} + \frac{2\,x_4\,x_6 + x_5^2}{k_2 - \lambda} + \frac{2\,x_4\,x_5}{(k_2 - \lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_2 - \lambda)^2}$$

$$= 0 = \frac{(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - \lambda)\,(k_2 - \lambda)^3},$$

$$\sigma\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \frac{(k_1 - \lambda_1)\,(k_1 - \lambda_2)}{(k_2 - k_1)^3}, \quad \sigma\,x_4^2 = A_2,$$

$$2\,\sigma\,x_4\,x_5 = A_2\,\alpha_5, \quad 2\,\sigma\,x_4\,x_6 = A_2\,(A' - \tfrac{1}{4}\,\alpha_5^2);$$

A_2, α_5 und A' sind dieselben wie im vorhergehenden Falle.

Doppelgerade des Komplexes bilden $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, darunter die Regelschar der Erzeugenden auf der Singularitätenfläche $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$; von diesen wiederum nimmt die Achse von $x_4 = 0$ eine ausgezeichnete Stellung ein, sie hat als dreifache singuläre Direktrix zu gelten, wie die Segresche Methode dartut. Die vierte singuläre Direktrix r gibt $\lambda_1 = \lambda_2 = k_1$ oder $x_1' = x_2' = x_3' = 0$, $x_4' : x_5' : x_6' = 2 : \dfrac{1}{k_1 - k_2} : -\dfrac{1}{4\,(k_1 - k_2)^2}$; die singulären Linien irgend eines Komplexes:

$$x_4 : x_5 : x_6 = 2 : -\frac{2\,(k_1 - \lambda) - (k_2 - \lambda)}{(k_1 - k_2)\,(k_2 - \lambda)} : \frac{4\,(k_1 - \lambda) - (k_2 - \lambda)}{4\,(k_1 - k_2)^2\,(k_2 - \lambda)}$$

haben sie und die zugeordnete Direktrix r':

$$x_4'' : x_5'' : x_6'' = 2 : -\frac{4\,(k_1 - \lambda) - (k_2 - \lambda)}{(k_1 - k_2)\,(k_2 - \lambda)} : -\frac{[4\,(k_1 - \lambda) - (k_2 - \lambda)]^2}{4\,(k_1 - k_2)^2\,(k_2 - \lambda)^2}$$

zu Leitgeraden ihrer Kongruenz. Den übrigen Bestandteil der Kongruenz singulärer Linien bilden, dreifach zählend, die Flächen-

---

kann, ausser auf die bei Salmon angeregte Art, nämlich mittels der projektiven Punktreihen, welche die Tangenten auf K ausschneiden, die Berührungssehne zu zeichnen, auch analog der planimetrischen Aufgabe, einem Dreieck einen Kreis einzubeschreiben, folgendermassen erledigt werden: man sucht die zu je zwei Geraden und K gleichzeitig harmonischen Strahlen; je drei derselben schneiden sich im Pole der Berührungssehne eines der verlangten Kegelschnitte.

tangenten längs der Achse von $x_4 = 0$. Für den zu einer Geraden g gehörigen Komplexkegelschnitt hat man den Treffpunkt mit jener Achse und in ihm dreipunktige Berührung mit der Schnittkurve der Singularitätenfläche, den Schnittpunkt mit r und Tangente g,[1]) im Einklang mit Segres Abbildung.

Durch die Hilfskomplexe ϑ und η:

$$x_1 = r\cos\vartheta,\ x_2 = r\sin\vartheta\cos\eta,\ x_3 = r\sin\vartheta\sin\eta$$

wird die Differentialgleichung:

$$S^2(dx_i) = 0 = M_1\,d\lambda_1^2 + M_2\,d\lambda_2^2 + M_3\,d\vartheta^2 + M_4\,d\eta^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\,\psi}{(k_1-\lambda_1)\,(k_2-\lambda_1)^3},\ M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = 4r^2 = \frac{4\,(k_1-\lambda_1)\,(k_1-\lambda_2)\,\psi}{(k_2-k_1)^3},\ M_4 = 4r^2\sin^2\vartheta,\ \text{und}$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_1-\lambda_1)\,(k_2-\lambda_1)}\cdot\sqrt{\frac{\lambda_1-a}{k_2-\lambda_1}} + \int \varphi_2\,d\lambda_2$$

$$+\frac{2}{\sqrt{(k_2-k_1)^3}}\cdot\int\sqrt{k_1-a-\frac{b}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta + 2\eta\cdot\sqrt{\frac{b}{(k_2-k_1)^3}} + C.$$

IV. Kanonische Form [1122].

Die vierte kanonische Form erfordert die Identität:

$$P = y_1^2 + y_2^2 + 2\,y_3\,y_4 + 2\,y_5\,y_6 = 0,$$

den Komplex:

$$\Omega = k_1\,y_1^2 + k_2\,y_2^2 + 2\,k_3\,y_3\,y_4 + 2\,k_4\,y_5\,y_6 - y_3^2 - y_5^2 = 0 \text{ und}$$

$$\Omega' = k_1^2\,y_1^2 + k_2^2\,y_2^2 + 2\,k_3^2\,y_3\,y_4 + 2\,k_4^2\,y_5\,y_6 - 2\,k_3\,y_3^2 - 2\,k_4\,y_5^2 = 0.$$

---

[1]) Die Konstruktion eines Kegelschnittes X, der einen vorliegenden K in Punkt B dreipunktig und zudem eine Gerade g berühren und durch Punkt C gehen soll, lässt sich zurückführen auf das verwandte Problem, wo ein weiterer Punkt D statt g gegeben ist, und das nach Salmon, Kegelschnitte Nr. 301, Beispiel 17 oder analog der Zeichnung des Krümmungskreises in einem Punkt eines Kegelschnittes zu lösen ist. So kann man verschiedene Individuen des besonderen Kegelschnittbüschels ($CBBB$) zeichnen, welche auf g eine Involution ausschneiden, ihre Doppelelemente geben die Berührungspunkte von g mit X.

Durch Substitution der zugeordneten Linie x:

$$y_1 = \frac{\varrho x_1}{k_1 - \lambda},\ y_2 = \frac{\varrho x_2}{k_2 - \lambda},\ y_3 = \frac{\varrho x_3}{k_3 - \lambda},\ y_4 = \frac{\varrho x_4}{k_3 - \lambda} + \frac{\varrho x_3}{(k_3 - \lambda)^2},$$

$$y_5 = \frac{\varrho x_5}{k_4 - \lambda},\ y_6 = \frac{\varrho x_6}{k_4 - \lambda} + \frac{\varrho x_5}{(k_4 - \lambda)^2}$$

entstehen die Gleichungen der Komplexschar:

$$P = \frac{x_1^2}{(k_1 - \lambda)^2} + \frac{x_2^2}{(k_2 - \lambda)^2} + \frac{2 x_3 x_4}{(k_3 - \lambda)^2} + \frac{2 x_5 x_6}{(k_4 - \lambda)^2} + \frac{2 x_3^2}{(k_3 - \lambda)^3}$$
$$+ \frac{2 x_5^2}{(k_4 - \lambda)^3} = 0 = \chi,$$

$$\Omega - \lambda P = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{2 x_3 x_4}{k_3 - \lambda} + \frac{2 x_5 x_6}{k_4 - \lambda} + \frac{x_3^2}{(k_3 - \lambda)^2} + \frac{x_5^2}{(k_4 - \lambda)^2} = 0 = \varphi,$$

$$\Omega' - 2\lambda\Omega + \lambda^2 P = x_1^2 + x_2^2 + 2 x_3 x_4 + 2 x_5 x_6 = 0 = J.$$

22. [1122] **22.** Im ersten Falle dieser Form [1122] haben wir:

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{2 x_3 x_4}{k_3 - \lambda} + \frac{2 x_5 x_6}{k_4 - \lambda} + \frac{x_3^2}{(k_3 - \lambda)^2} + \frac{x_5^2}{(k_4 - \lambda)^2} = 0$$
$$= \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)\,\psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)(k_3 - \lambda)^2 (k_4 - \lambda)^2},$$

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)(k_1 - \lambda_3)(k_1 - \lambda_4)}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)^2 (k_4 - k_1)^2},\quad \sigma x_2^2 = \frac{(k_2 - \lambda_1)\cdots(k_2 - \lambda_4)}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_2)^2 (k_4 - k_2)^2},$$

$$\sigma x_3^2 = \frac{(k_3 - \lambda_1)(k_3 - \lambda_2)(k_3 - \lambda_3)(k_3 - \lambda_4)}{(k_1 - k_3)(k_2 - k_3)(k_4 - k_3)^2} = A_3,\quad \sigma x_5^2 = A_4,$$

$$2\sigma x_3 x_4 = A_3 \cdot \alpha_4,\quad 2\sigma x_5 x_6 = A_4 \cdot \alpha_6,$$

$$\alpha_4 = -\left(\frac{1}{k_3 - \lambda_1} + \cdots + \frac{1}{k_1 - k_3} + \frac{1}{k_2 - k_3} + \frac{2}{k_4 - k_3}\right),$$

A_4 und α_6 sind wie A_3 und α_4 gebildet, nur dass die Indizes 3 und 4 vertauscht sind.

Die sich schneidenden Achsen von $x_3 = 0$ und $x_5 = 0$ mit den Koordinaten: (0, 0, 0, 1, 0, 0) und (0, 0, 0, 0, 0, 1) gehören allen Komplexen der Schar an und sind Doppelgerade der

Singularitätenfläche. $\lambda = k_3$ gibt die Treffgeraden der ersten, $\lambda_1 = \lambda_2 = k_3$ die Flächentangenten längs derselben, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = k_3$ gibt zwei einfache Geraden der Fläche, die singulären Strahlen, und die zwei singulären Achsen, welche jene Achse von $x_3 = 0$ treffen. Betrachtet man nämlich mit Plücker[1]) die Fläche als Komplexfläche im allgemeinen Falle für eine Tangente d der Kummerschen Fläche als Leitlinie, so vereinigen sich je zwei singuläre Strahlen und Achsen in die singuläre Komplexlinie e, je zwei aber bleiben unverändert in der Eigenschaft, die sie bei der allgemeinen Komplexfläche besitzen. Da man auch e als Tangente und d als singuläre Linie (eines anderen Komplexes der Schar, welche die Kummersche Fläche bestimmt) auffassen kann, ergeben sich noch je zwei singuläre Strahlen und Achsen. Eine singuläre Achse liegt zwar nicht auf der Fläche, aber ihre sämtlichen Ebenen berühren sie im Schnittpunkt mit der zugehörigen Doppellinie. Die vier singulären Achsen geben mit den Doppelgeraden und deren Polaren ein gleiches Bild harmonischer Erzeugender der Fläche zweiten Grades, wie es Weiler für die singulären Strahlen beschreibt.

Die Bildung der Differentiale geschieht wie im Falle 7 und führt uns zu den Gleichungen:

$$S^2(dx_i) = 4(dx_1^2 + dx_2^2 + 2\,dx_3\,dx_4 + 2\,dx_5\,dx_6) = \sum_1^4{}^i M_i\,d\lambda_i^2,$$

$$M_1 = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)^2} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda_1)^2} + \frac{2\,x_3\,x_4}{(k_3-\lambda_1)^2} + \frac{2\,x_5\,x_6}{(k_4-\lambda_1)^2} + \frac{4\,x_3\,x_4}{(k_3-\lambda_1)^3\,a_4} +$$

$$+ \frac{4\,x_5\,x_6}{(k_4-\lambda_1)^3\,a_6} = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\,\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)^2(k_4-\lambda_1)^2},$$

$$M_2 = \chi(\lambda_2), \quad M_3 = \chi(\lambda_3), \quad M_4 = \chi(\lambda_4);$$

$$W = \sum_1^4{}^i \int \varphi_i\,d\lambda_i + C = 0,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{1}{(k_3-\lambda_i)(k_4-\lambda_i)} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}{(k_1-\lambda_i)(k_2-\lambda_i)}}.$$

[1]) A. a. O. Nr. 344, II.

Durch doppelte Anwendung des im Falle 7 durchgeführten Grenzüberganges könnten diese Resultate aus dem allgemeinen Falle abgeleitet werden.

23. [11(22)] **23.** Mit Fall [11(22)] kommen wir zu einem merkwürdigen und wichtigen Typus. Zunächst ist

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{2\,x_3\,x_4 + 2\,x_5\,x_6}{k_3 - \lambda} + \frac{x_3^2 + x_5^2}{(k_3 - \lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - \lambda)\,(k_2 - \lambda)\,(k_3 - \lambda)^2},$$

$$\sigma\,x_1^2 = \frac{(k_1 - \lambda_1)\,(k_1 - \lambda_2)}{(k_2 - k_1)\,(k_3 - k_1)^2}, \quad \sigma\,x_2^2 = \frac{(k_2 - \lambda_1)\,(k_2 - \lambda_2)}{(k_1 - k_2)\,(k_3 - k_2)^2},$$

$$\sigma\,(x_3^2 + x_5^2) = \frac{(k_3 - \lambda_1)\,(k_3 - \lambda_2)}{(k_1 - k_3)\,(k_2 - k_3)} = A_3,\ \sigma(2\,x_3 x_4 + 2\,x_5 x_6) = A_3 \cdot A,$$

$$A = -\left(\frac{1}{k_3 - \lambda_1} + \frac{1}{k_3 - \lambda_2} + \frac{1}{k_1 - k_3} + \frac{1}{k_2 - k_3}\right).$$

Die singulären Linien irgend eines Komplexes λ, teils Tangenten des Kegels K teils Treffgerade des Kegelschnittes C[1]), gehören den zwei linearen Komplexen an:

$$\frac{x_1}{x_2} = \pm i \cdot \frac{(k_1 - \lambda)\,(k_3 - k_2)}{(k_2 - \lambda)\,(k_3 - k_1)};$$

Leitgerade der speziellen Komplexe ($\mu = \pm i$) aus der Schar $x_1 + \mu\,x_2 = 0$ sind die Schnittlinie $S_1\,M$ der dem Kegel und dem Kegelschnitt gemeinsamen Tangentialebenen und $S_3\,S_4$, die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte auf C. Da die linearen Komplexe der singulären Geraden von λ die Kongruenz mit diesen Leitgeraden gemeinsam haben, so ist in einer beliebigen Ebene E' die Gerade p dieser Kongruenz eine Seite des den Komplexkegelschnitten und dem Schnitt k des Kegels K gemeinschaftlichen Polardreieckes.[2]) Der Pol P von p bezüglich

[1]) S. Weiler a. a. O., p. 185.

[2]) p ist jedoch nicht Berührungssehne; sonst gäbe es nämlich nur einen Komplex, keine Komplexschar; daher ist es nicht zutreffend, wenn

k liegt in der Ebene E des Kegelschnittes C und ist in der Tat auch bezüglich C harmonisch zum Durchstosspunkt von p gelegen. Aus P und p als Pol und Polare, den Schnittpunkten A und B von C mit E' und dem doppelt zu berührenden k lässt sich der Komplexkegelschnitt ermitteln, sobald der Komplex durch eine Gerade g festgelegt ist.[1])

Ein linearer Komplex, der zu den zwei durch g bestimmten Komplexen λ involutorisch liegt, ist $x_3 = \lambda_3 x_5$. Dies ist aber hier zugleich der einzige. Wie nämlich in dem analogen Falle [(22)] der Raumgeometrie[2]) jede Ebene $x_1 = \lambda x_3$ als Tangentialebene der Fundamentalfläche zu sich selbst „senkrecht" ist, so ist hier mit $x_3 = 0$ und $x_5 = 0$ jeder Komplex $x_3 = \lambda x_5$ speziell und daher zu sich selber involutorisch. Es hängt hiemit folgende Zuordnung zusammen:

Dem Schnittpunkte P von g und E entspricht im Komplexe λ_1 ein zerfallener Kegel; da die Schnittlinie der zwei Ebenen die Doppelgerade PM sein muss, so ist Mg die eine Ebene; sie ist auch im Komplexe λ_2 und in $x_3 = \lambda_3 x_5$ dem M zugewiesen. Die Komplexschar hat somit das Besondere, dass dem Punkte der Doppelebene in allen Tangentialkomplexen stets die gleiche Ebene zugehört. Den Schnittpunkten P' und P'' von g mit dem Kegel K entsprechen in den Tangentialkomplexen von λ_1 und λ_2 die beiden Tangentialebenen von g an den Kegelschnitt C wechselweise, in $x_3 = \lambda_3 x_5$ als in einem speziellen Komplexe wieder Ebene Mg.

Da die Einführung eines vierten involutorischen Komplexes zur Festlegung der Raumgeraden nicht möglich ist, versagt

---

Weiler sagt: „zu K gehört in dem einen linearen Komplex ein Kegelschnitt in E".

[1]) Die Konstruktion ist bei Annahme der Ebene E' durch g folgende: irgend eine Gerade durch P als Berührungssehne führt zu einem Kegelschnitte eines linearen Systemes, das auf g eine Involution ausschneidet; die Doppelpunkte derselben sind die Berührungspunkte; geht die Ebene E' nicht durch g, so lassen sich in E' mittels dieser und der dualen Konstruktion neue Komplexgerade finden.

[2]) Clebsch-Lindemann, Geometrie II, 1: XIV, Nr. 11, p. 319 ff.

auch die bisherige Methode zur Auffindung der Integralflächen. Wir kommen statt dessen auf folgendem Wege[1]) zum Ziel. Zunächst transformieren wir:

$$\xi_3 = x_3 + i x_5,\ \xi_4 = x_4 + i x_6,\ \xi_5 = x_3 - i x_5,\ \xi_6 = x_4 - i x_6;$$

so wird

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \frac{\xi_3 \xi_6 + \xi_4 \xi_5}{k_3 - \lambda} + \frac{\xi_3 \xi_5}{(k_3 - \lambda)^2} = 0.$$

Die Integralflächen haben, wie wir im Falle 3 sahen, die den geodätischen Linien des Raumes analoge Eigenschaft, durch alle linearen Transformationen in sich überzugehen, falls nur der Komplex in sich übergeführt wird und ausserdem alles fest bleibt, was eine ausgezeichnete Stellung im Fundamentaltetraeder einnimmt, hier die Kongruenz $\xi_3 = 0,\ \xi_5 = 0$. Deshalb muss hier auch der Komplex $\xi_4 = 0$ seine Kongruenz mit $\xi_3 = 0$, $\xi_6 = 0$ mit $\xi_5 = 0$ beibehalten. So lautet denn die Transformation:

$$\xi_3 = \alpha_1 \eta_3, \qquad \xi_5 = \alpha_2 \eta_5,$$
$$\xi_4 = \beta_1 \eta_3 + \alpha_1 \eta_4, \qquad \xi_6 = \beta_2 \eta_5 + \alpha_2 \eta_6,$$

x_1 und x_2 unverändert.

Die Identität: $x_1^2 + x_2^2 + \xi_4 \xi_5 + \xi_3 \xi_6 = 0$, $\varphi = 0$ und $\chi = 0$ gehen in sich über, sobald $\alpha_1 \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = 0$ sind.

Bei n maliger Wiederholung resultiert:

$$^n\xi_3 = \alpha_1^n \eta_3, \qquad ^n\xi_5 = \alpha_2^n \eta_5,$$
$$^n\xi_4 = n \cdot \alpha_1^{n-1} \cdot \beta_1 \eta_3 + \alpha_1^n \eta_4, \qquad ^n\xi_6 = n \cdot \alpha_2^{n-1} \beta_2 \eta_5 + \alpha_2^n \cdot \eta_6.$$

Wird nun n als stetig veränderlicher Parameter gedacht, so ergibt eine unendlich kleine Transformation:

$$\eta_3 + d\eta_3 = \alpha_1^{dn} \eta_3, \text{ oder da } \alpha_1^{dn} = 1 + dn \lg \alpha_1 + dn^2 (\cdots),$$
$$d\eta_3 = \eta_3 \lg \alpha_1 \, dn, \qquad d\eta_5 = \eta_5 \lg \alpha_2 \, dn,$$
$$d\eta_4 = \eta_3 \, dn \cdot \beta_1' + \eta_4 \lg \alpha_1 \, dn, \quad d\eta_6 = \eta_5 \, dn \cdot \beta_2' + \eta_6 \lg \alpha_2 \, dn,$$

dabei ist $\beta_1' = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\beta_2' = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ also $\beta_1' + \beta_2' = 0$.

[1]) Clebsch-Lindemann, Geometrie II, 1: XIV, Nr. 11, p. 319 ff.

Integriert geben diese Gleichungen:

$$\lg \eta_3 = n \cdot \lg \alpha_1 + \lg \delta_3$$

oder:

$$\eta_3 = \delta_3 \cdot \alpha_1^n, \quad \eta_5 = \delta_5 \cdot \alpha_2^n;$$

$$d\,\eta_4 = \beta_1' \cdot \frac{d\,\eta_3}{\lg \alpha_1} + \eta_4 \cdot \frac{d\,\eta_3}{\eta_3}$$

oder

$$d\left(\frac{\eta_4}{\eta_3}\right) = \frac{\beta_1'}{\lg \alpha_1}\, d\,(\lg \eta_3) = \beta_1'\, d\,n,$$

also:

$$\eta_4 = n\,\beta_1' \cdot \eta_3 + c\,\eta_3 = (\delta_3\,\beta_1'\,n + \delta_4)\,\alpha_1^n,$$

ebenso

$$\eta_6 = n\,\beta_2'\,\eta_5 + c'\,\eta_5 = (\delta_5\,\beta_2'\,n + \delta_6)\,\alpha_2^n.$$

Dies ist die Parameterdarstellung der Integralfläche zu zwei Komplexen λ_1, λ_2, falls x_1, x_2, δ_3, δ_4, δ_5, δ_6 die Koordinaten einer beliebigen Geraden der beiden Komplexe bedeuten.

Zur Bestätigung betrachten wir die Gleichung des einfachen Komplexes, dem die Kongruenz λ_1, λ_2 angehört:

$$\frac{\eta_3\eta_6 + \eta_4\eta_5}{\eta_3\,\eta_5} = A, \quad A = -\left(\frac{1}{k_3 - \lambda_1} + \frac{1}{k_3 - \lambda_2} + \frac{1}{k_1 - k_3} + \frac{1}{k_2 - k_3}\right);$$

mit $\alpha_1\,\alpha_2 = 1$ wird $\eta_3\,\eta_6 + \eta_4\,\eta_5 = \delta_3\,\delta_6 + \delta_4\,\delta_5$ und $\eta_3\,\eta_5 = \delta_3\,\delta_5$; die Komplexschar geht in sich über.

Da mit λ_1 und λ_2 auch x_1 und x_2 konstant sind, lautet die Differentialgleichung sich schneidender Linien einfach:

$$d\,\eta_3\,d\,\eta_6 + d\,\eta_4\,d\,\eta_5 = d\,n^2 \cdot [(\eta_3\,\eta_6 + \eta_4\,\eta_5)\lg \alpha_1 \lg \alpha_2 + \eta_3\,\eta_5 \cdot (\beta_1' \lg \alpha_2 + \beta_2' \lg \alpha_1)] = 0.$$

Sie ist, wie der Vergleich mit:

$$\eta_3\,\eta_6 + \eta_4\,\eta_5 - A \cdot \eta_3\,\eta_5 = 0$$

ersehen lässt, erfüllt, wenn man setzt:

$$\frac{\beta_1'}{\lg \alpha_1} + \frac{\beta_2'}{\lg \alpha_2} = -A$$

oder

$$\beta_1' = -\beta_2' = -A \cdot \frac{\lg \alpha_1}{2}.$$

Die Geraden, welche die Integralfläche umhüllen, enthalten dadurch in den Koordinaten drei unabhängige Konstante α_1, λ_1 und λ_2; die willkürlich zum Ausgangspunkt genommene Gerade δ gibt, da sie selbst an die nämlichen Gleichungen gebunden ist, lediglich einen Proportionalitätsfaktor, so dass es, wie immer, ∞^3 Integralflächen gibt.

24. [12(12)] **24.** In Fall [12(12)] ist:

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{2x_3x_4}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{x_2^2+2x_5x_6}{k_3-\lambda} + \frac{x_5^2}{(k_3-\lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)^2(k_3-\lambda)^2},$$

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)}{(k_2-k_1)^2(k_3-k_1)^2}, \quad \sigma x_3^2 = A_2, \quad \sigma x_5^2 = A_3,$$

$$2x_3x_4 = A_2 \cdot B_2, \quad \sigma(x_2^2+2x_5x_6) = A_3 \cdot B_3,$$

wobei

$$A_i = \frac{(k_i-\lambda_1)(k_i-\lambda_2)(k_i-\lambda_3)}{(k_1-k_i)(k_j-k_i)^2},$$

$$B_i = -\left(\frac{1}{k_i-\lambda_1} + \frac{1}{k_i-\lambda_2} + \frac{1}{k_i-\lambda_3} + \frac{1}{k_1-k_i} + \frac{2}{k_j-k_i}\right)$$

und $i \neq j$ die Zahlen 2 und 3 bedeuten.

Wir können uns kurz fassen: durch jeden Punkt der Fläche geht eine Gerade $\lambda_1 = \lambda_2 = k_3$, die ganz in der Fläche liegt. Diese spezielle Kongruenz vermittelt durch den Komplex $x_2 = \lambda_4 x_5$ die Zuordnung von Punkten und Tangentialebenen der Singularitätenfläche für eine gegebene Gerade g.

Es wird ferner

$$4(dx_1^2 + dx_2^2 + 2\,dx_3\,dx_4 + 2\,dx_5\,dx_6) = M_1\,d\lambda_1^2 + M_2\,d\lambda_2^2 + M_3\,d\lambda_3^2 + M_4\,d\lambda_4^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)^2(k_3-\lambda_1)^2}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2), \quad M_3 = \chi(\lambda_3),$$

$$M_4 = \frac{4\,x_2^2}{\lambda_4^2} = \frac{4\,(k_3-\lambda_1)\,(k_3-\lambda_2)\,(k_3-\lambda_3)\,\psi}{(k_1-k_3)\,(k_2-k_3)^2},$$

$$W = \int \varphi_1\,d\lambda_1 + \int \varphi_2\,d\lambda_2 + \int \varphi_3\,d\lambda_3 + \frac{2\lambda_4}{k_2-k_3}\cdot\sqrt{\frac{(k_3-a)(k_3-b)}{k_3-k_1}} + C,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{1}{(k_2-\lambda_i)\,(k_3-\lambda_i)}\cdot\sqrt{\frac{(\lambda_i-a)\,(\lambda_i-b)}{(k_1-\lambda_i)\,(k_3-\lambda_i)}}.$$

25. Mit dem Falle [1(122)] kleidet sich φ in die Form: 25. [1(122)]

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2 + 2\,x_3\,x_4 + 2\,x_5\,x_6}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2+x_5^2}{(k_2-\lambda)^2} = 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)\,\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)^2}.$$

Die Achsen der speziellen Komplexe $x_3 = 0$ und $x_5 = 0$ legen die Ebene $y_1 = 0$ und den Punkt $v_2 = 0$ fest, welche vierfach zählend die Singularitätenfläche ausmachen.

Als F_2 betrachtet, hat diese Regelscharen, welche zusammengefallen sind in den Büschel $x_1 = 0 = x_2 = x_3 = x_5$. Hierunter sind singuläre Direktrizen, wie Segres Methode übereinstimmend mit Weiler ergibt, die Achsen von $x_3 + i\,x_5 = 0$, $x_3 - i\,x_5 = 0$, je doppelt wiegend. In einer Ebene durch eine gegebene Gerade g ist der Kegelschnitt bestimmt, da er die beiden Achsen treffen und dort feste Tangenten berühren muss. Letztere kann man durch irgend einen Komplex erhalten, etwa durch den Fundamentalkomplex $\lambda = k_1$ oder $x_1 = 0$; die beiden Tangenten schneiden sich in dem Punkte, welcher der Ebene in $x_1 = 0$ entspricht.

Die Differentialaufgabe ist wie in Nr. 23 zu behandeln; die Geraden, welche die Integralflächen erzeugen, haben die Form:

$$\eta_3 = \delta_3 \cdot \alpha_1^n, \qquad \eta_5 = \delta_5 \cdot \alpha_2^n,$$

$$\eta_4 = (n\,\delta_3\,\beta_1' + \delta_4)\,\alpha_1^n, \quad \eta_6 = (n\,\delta_5\,\beta_2' + \delta_6)\,\alpha_2^n,$$

$$\sigma\,x_1^2 = \frac{k_1-\lambda_1}{(k_2-k_1)^2}, \quad \sigma\,\eta_3\,\eta_5 = \sigma\,(x_3^2+x_5^2) = \frac{k_2-\lambda_1}{k_1-k_2} = A_2,$$

$$\sigma\,(x_2^2 + \eta_3\,\eta_6 + \eta_4\,\eta_5) = A_2\,A = \sigma\,(x_2^2 + 2\,x_3\,x_4 + 2\,x_5\,x_6),$$

$$A = -\left(\frac{1}{k_2 - \lambda_1} + \frac{1}{k_1 - k_2}\right),$$

$$\sigma\,(x_2^2 + \eta_3\,\eta_6 + \eta_4\,\eta_5) = \sigma\,\eta_3\,\eta_5 \cdot A\,.$$

Betrachtet man σx_2^2 und ebenso λ_1 als konstant, so ist die Differentialgleichung des Schneidens konsekutiver Linien:

$$0 = d\,\eta_3\,d\,\eta_6 + d\,\eta_4\,d\,\eta_5$$
$$= d\,n^2\,[\lg\,\alpha_1 \cdot \lg\,\alpha_2 \cdot (\eta_3\,\eta_6 + \eta_4\,\eta_5) + \eta_3\,\eta_5\,(\beta_1'\lg\,\alpha_2 + \beta_2'\lg\,\alpha_1)].$$

Sie ist erfüllt, wenn

$$\beta_1' = -\beta_2' = \frac{\lg\,\alpha_1}{2} \cdot \left[\frac{1}{k_2 - \lambda_1} + \frac{1}{k_1 - k_2} + \frac{\sigma\,x_2^2 \cdot (k_1 - k_2)}{k_2 - \lambda_1}\right];$$

es enthält somit die Parameterdarstellung wieder drei Konstante: α_1, λ_1 und σx_2^2.

26. [(11)22] **26.** Die Form des Falles [(11)22]:

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{k_1 - \lambda} + \frac{2\,x_3\,x_4}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{(k_2 - \lambda)^2} + \frac{2\,x_5\,x_6}{k_3 - \lambda} + \frac{x_5^2}{(k_3 - \lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,(\lambda - \lambda_3)\,\psi}{(k_1 - \lambda)\,(k_2 - \lambda)^2\,(k_3 - \lambda)^2}$$

zeigt, dass die Linien der „zerfallenden“ Kongruenz $x_3 = 0$, $x_5 = 0$, d. h. die in Ebene $y_1 = 0$ liegenden und die durch den Punkt v_2 verlaufenden, allen Komplexen angehören und singulär sind. Von der Singularitätenfläche spaltet sich deshalb jene Ebene und jener Punkt ab und es bleibt übrig eine Fläche dritter Ordnung und dritten Grades; auf dieser ist die Achse $S_1\,S_2$ des speziellen Komplexes $x_1 - i\,x_2 = 0$ Doppelstrahl, $S_3\,S_4$, die Achse von $x_1 + i\,x_2 = 0$, Doppelachse. Die Leitgeraden von $x_3 = 0$ und $x_5 = 0$, nämlich $S_2\,S_3$ und $S_2\,S_4$, erscheinen als Doppelgerade, da noch die Doppeltangentialebene $y_1 = 0$ und der Doppelpunkt $v_2 = 0$ zur Vervollständigung der Singularitätenfläche hinzutritt; der F_3 gehören sie nur einfach

an.[1]) $\lambda_1 = \lambda_2 = k_1$ gibt wie stets bei der Verbindung (11) die Geraden der Fläche t; gestützt auf sie, weist der lineare Komplex ϑ: $x_1 = r\cos\vartheta$, $x_2 = r\sin\vartheta$ Durchschnittspunkte und Tangentialebenen der gegebenen Geraden g einander zu, wodurch z. B. der Punkt P, in dem g die Ebene $y_1 = 0$ trifft, und Ebene gS_2 auf einander bezogen sind.

Die Differentialaufgabe wird, wie folgt, erledigt:

$$S^2(dx_i) = 4(dx_1^2 + dx_2^2 + 2\,dx_3\,dx_4 + 2\,dx_5\,dx_6) = M_1\,d\lambda_1^2 + M_2\,d\lambda_2^2 + M_3\,d\lambda_3^2 + M_4\,d\vartheta^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)^2(k_3-\lambda_1)^2}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = \chi(\lambda_3), \quad M_4 = 4r^2 = 4\cdot\frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)\psi}{(k_2-k_1)^2(k_3-k_1)^2},$$

$$W = \int\varphi_1\,d\lambda_1 + \int\varphi_2\,d\lambda_2 + \int\varphi_3\,d\lambda_3 + \frac{\sqrt{-(k_3-a)(k_3-b)}}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)}\cdot\vartheta + C,$$

wo $$\varphi_i = \frac{\sqrt{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}}{(k_1-\lambda_i)(k_2-\lambda_i)(k_3-\lambda_i)}.$$

27. Wenn das Schema der Elementarteiler [(112)2] lautet, ist: 27. [(112)2]

$$\varphi = \frac{x_1^2+x_2^2+2x_3x_4}{k_1-\lambda} + \frac{x_3^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{2x_5x_6}{k_2-\lambda} + \frac{x_5^2}{(k_2-\lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\psi}{(k_1-\lambda)^2(k_2-\lambda)^2}, \quad \sigma x_3^2 = A_1, \quad \sigma x_5^2 = A_2, \quad A_i = \frac{(k_i-\lambda_1)(k_i-\lambda_2)}{(k_j-k_i)^2},$$

$$2\sigma x_5x_6 = A_2B_2, \quad \sigma(x_1^2+x_2^2+2x_3x_4) = A_1\cdot B_1,$$

$$B_i = -\left(\frac{1}{k_i-\lambda_1} + \frac{1}{k_i-\lambda_2} + \frac{2}{k_j-k_i}\right).$$

[1]) Bei Plücker, Neue Geometrie Nr. 344, VI erscheint diese Fläche als Komplexfläche im allgemeinen Falle, wenn eine Linie durch einen Doppelpunkt und in einer Doppelebene der Kummerschen Fläche als Leitgerade gewählt wird.

Von der in zwei Ebenen und zwei Punkte zerfallenen F_2, die doppelt zählend die Singularitätenfläche darstellt, ist die eine Erzeugung $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, die Komplexdoppelgeraden, die andere Schar bilden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_5 = 0$, die Direktrizen. Die Achse von $x_5 = 0$ zählt zweifach als singuläre Direktrix r, die zugehörige Gerade r' ist unbestimmt, liegt aber in $y_1 = 0$, der „Ausnahmeebene", und geht durch $v_2 = 0$, den Ausnahmepunkt; wir können daher die Achse von $x_4 = 0$ dafür annehmen. Die weiteren zwei singulären Direktrizen r sind $(0,0,0,1,+(k_2-k_1),0)$, die zugehörigen r': $(0,0,(k_1-\lambda),0,+(k_2-\lambda),0)$. Sie bestimmen die allgemeinen singulären Linien, für welche die Koordinatenrelation besteht: $x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = (k_1 - \lambda)(k_2 - k_1) : -(k_2 - \lambda) : \pm (k_2 - \lambda)(k_1 - k_2) : \mp (k_1 - \lambda)$, gewonnen aus obigen Koordinaten für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Die Konstruktion des Komplexkegelschnittes in einer beliebigen Ebene fordert Berührung der Ausnahmeebene im Schnittpunkte mit der Achse von $x_5 = 0$, Treffen der zwei singulären Direktrizen r und Tangieren der gegebenen Geraden g, hat somit zwei Lösungen und läuft auf die in Segres Abbildung angeführte Aufgabe hinaus.

Als Hilfskomplexe nehmen wir λ_4 und ϑ, $x_1 = r\cos\vartheta$, $x_2 = r\sin\vartheta$, $r = \lambda_4 x_3$; hiedurch wird: $2\sigma x_3 x_4 = A_1(B_1 - \lambda_4^2)$, $\sigma r^2 = \lambda_4^2 A_1$,

$$S^2(dx_i) = M_1 d\lambda_1^2 + M_2 d\lambda_2^2 + M_3 d\vartheta^2 + M_4 d\lambda_4^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\psi}{(k_1 - \lambda_1)^2 (k_2 - \lambda_1)^2}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2),$$

$$M_3 = 4r^2 = \lambda_4^2 \cdot M_4, \quad M_4 = \frac{4(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)\psi}{(k_2 - k_1)},$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_1 - a}{k_1 - \lambda_1}} + \int \varphi_2 d\lambda_2 + \frac{2\sqrt{b}}{k_2 - k_1}\vartheta$$
$$+ \frac{2}{k_2 - k_1} \cdot \int \sqrt{a - k_1 - \frac{b}{\lambda_4^2}}\, d\lambda_4 + C.$$

28. Im Falle [(12)(12)] gilt: 28. [(12)(12)]

$$\varphi = \frac{x_1^2 + 2\,x_3\,x_4}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2 + 2\,x_5\,x_6}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{(k_1 - \lambda)^2} + \frac{x_5^2}{(k_2 - \lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\psi}{(k_1 - \lambda)^2\,(k_2 - \lambda)^2},\ \sigma x_3^2 = A_1,\ \sigma x_5^2 = A_2,\ A_i = \frac{(k_i - \lambda_1)\,(k_i - \lambda_2)}{(k_j - k_i)^2},$$

$$i \neq j = 1, 2,$$

$$\sigma\,(x_1^2 + 2\,x_3\,x_4) = A_1 \cdot B_1,\quad \sigma\,(x_2^2 + 2\,x_5\,x_6) = A_2 \cdot B_2,$$

$$B_i = -\left(\frac{1}{k_i - \lambda_1} + \frac{1}{k_i - \lambda_2} + \frac{2}{k_j - k_i}\right).$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$ bezeichnen den in Ebene $y_1 = 0$ durch Punkt $v_2 = 0$ gehenden Büschel doppelt singulärer Linien, der allen Komplexen gemeinsam ist. Die Achsen von $x_3 = 0$ und $x_5 = 0$ sind die Erzeugenden, längs deren sich die beiden F_2, in welche sich die Singularitätenfläche zerspalten hat, berühren. $\frac{x_3}{x_5} = \pm\frac{k_1 - \lambda}{k_2 - \lambda}$ sind die speziellen linearen Komplexe, denen die singulären Linien entnommen sind; ihre Bedeutung hat Weiler klargelegt. Nehmen wir, um eine Gerade g festzulegen, die linearen Komplexe λ_3 und λ_4 zu Hilfe: $x_1 = \lambda_3\,x_3$, $x_2 = \lambda_4\,x_5$, so gewinnen wir Zuordnungen wie bei Fall 3.

Es ist ferner:

$$S^2\,(d\,x_i) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(k_1 - \lambda_1)^2\,(k_2 - \lambda_1)^2}\,d\,\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(k_1 - \lambda_2)^2\,(k_2 - \lambda_2)^2}\,d\,\lambda_2^2$$

$$+ \frac{4\,(k_1 - \lambda_1)\,(k_1 - \lambda_2)}{(k_2 - k_1)^2}\,d\,\lambda_3^2 + \frac{4\,(k_2 - \lambda_1)\,(k_2 - \lambda_2)}{(k_1 - k_2)^2}\,d\,\lambda_4^2;$$

$$W = \int \frac{d\,\lambda_1}{(k_1 - \lambda_1)\,(k_2 - \lambda_1)} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_1 - a)\,(\lambda_1 - b)}{(k_1 - \lambda_1)\,(k_2 - \lambda_1)}} + \int \varphi_2\,d\,\lambda_2$$

$$+ \frac{2\sqrt{(k_1 - a)\,(k_1 - b)}}{\sqrt{(k_1 - k_2)^3}}\,\lambda_3 + \frac{2\sqrt{(k_2 - a)\,(k_2 - b)}}{\sqrt{(k_2 - k_1)^3}}\,\lambda_4 + C.$$

29. [(11)(22)] **29.** Die Singularitätenfläche des Falles [(11)(22)] mit den Gleichungen:

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{k_1 - \lambda} + \frac{2\,x_3\,x_4 + 2\,x_5\,x_6}{k_2 - \lambda} + \frac{x_3^2 + x_5^2}{(k_2 - \lambda)^2} = \frac{(\lambda - \lambda_1)\,\eta'}{(k_1 - \lambda)\,(k_2 - \lambda)^2},$$

$$\sigma\,(x_3^2 + x_5^2) = \frac{k_2 - \lambda_1}{k_1 - k_2} = A_1, \quad \sigma\,(2\,x_3\,x_4 + 2\,x_5\,x_6) = A_1\,B,$$

$$B = -\left(\frac{1}{k_2 - \lambda_1} + \frac{1}{k_1 - k_2}\right)$$

ist ausgeartet in die Ebenen $y_1 = 0$ doppelt, $y_3 + i\,y_4 = 0$ und $y_3 - i\,y_4 = 0$ und die Punkte $v_2 = 0$ doppelt, $v_3 + i\,v_4 = 0$, $v_3 - i\,v_4 = 0$. Führt man wieder Komplex ϑ ein: $x_1 = r\cos\vartheta$, $x_2 = r\sin\vartheta$, $\sigma\,(x_1^2 + x_2^2) = \sigma\,r^2 = \dfrac{k_1 - \lambda_1}{(k_2 - k_1)^2}$, so ersieht man leicht die Zuordnung der Punkte und Ebenen einer Geraden g zu einander, doch gelingt es wie bei 23 nicht, einen vierten involutorischen Komplex zu erlangen. Die Komplexkegelschnitte berühren die drei Ebenen, aus denen die Singularitätenfläche besteht, $y_1 = 0$ auf $S_3\,S_4$, der Leitgeraden des speziellen Komplexes $x_1 + i\,x_2 = 0$.

Die Parameterdarstellung der die Integralfläche umhüllenden Linien:

$$\eta_3 = \delta_3\,\alpha_1^n, \qquad \eta_5 = \delta_5\,\alpha_2^n,$$

$$\eta_4 = (\delta_3\,\beta_1'\,n + \delta_4)\,\alpha_1^n, \quad \eta_6 = (\delta_5\,\beta_2'\,n + \delta_6)\,\alpha_2^n,$$

wobei

$$\alpha_1\,\alpha_2 = 1, \quad \beta_1' = -\beta_2' = -B \cdot \frac{\lg \alpha_1}{2}$$

ist, enthält die drei wesentlichen Konstanten α_1, λ_1 und ϑ.

V. Kanonische Form [114].

Die fünfte kanonische Form hat als Grundlage die Gleichungen:

$$P = y_1^2 + y_2^2 + 2\,y_3\,y_6 + 2\,y_4\,y_5 = 0,$$

$$\Omega = k_1\,y_1^2 + k_2\,y_2^2 + 2\,k_3\,y_3\,y_6 + 2\,k_4\,y_4\,y_5 - 2\,y_3\,y_5 - y_4^2 = 0$$

und

$$\Omega' = k_1^2\,y_1^2 + k_2^2\,y_2^2 + k_3^2\,(2\,y_3\,y_6 + 2\,y_4\,y_5) - 2\,k_3\,(2\,y_3\,y_5 + y_4^2) + 2\,y_3\,y_4 = 0.$$

Wir substituieren die Koordinaten der „zugeordneten" Linie x:

$$\varrho\,x_1 = (k_1 - \lambda)\,y_1, \quad \varrho\,x_2 = (k_2 - \lambda)\,y_2, \quad \varrho\,x_3 = (k_3 - \lambda)\,y_3$$

$$\varrho\,x_4 = (k_3 - \lambda)\,y_4 - y_3, \quad \varrho\,x_5 = (k_3 - \lambda)\,y_5 - y_4,$$

$$\varrho\,x_6 = (k_3 - \lambda)\,y_6 - y_5;$$

so entwickeln wir das neue System:

$$P = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{2\,x_3\,x_6 + 2\,x_4\,x_5}{(k_3-\lambda)^2} + \frac{2\,(2\,x_3\,x_5 + x_4^2)}{(k_3-\lambda)^3} + \frac{3\cdot 2\,x_3\,x_4}{(k_3-\lambda)^4} + \frac{4\,x_3^2}{(k_3-\lambda)^5} = \chi,$$

$$\Omega - \lambda\,P = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \frac{2\,x_3\,x_6 + 2\,x_4\,x_5}{k_3-\lambda} + \frac{2\,x_3\,x_5 + x_4^2}{(k_3-\lambda)^2} + \frac{2\,x_3\,x_4}{(k_3-\lambda)^3} + \frac{x_3^2}{(k_3-\lambda)^4} = \varphi,$$

$$\Omega' - 2\,\lambda\,\Omega + \lambda^2\cdot P = x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3\,x_6 + 2\,x_4\,x_5 = J.$$

30. Für den Hauptfall [114] gilt wieder: 30. [114]

$$\varphi = 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,(\lambda-\lambda_3)\,(\lambda-\lambda_4)\,\psi}{(k_1-\lambda)\,(k_2-\lambda)\,(k_3-\lambda)^4},$$

$$\sigma\,x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)(k_1-\lambda_4)}{(k_2-k_1)\,(k_3-k_1)^4}, \quad \sigma\,x_2^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)\ldots(k_2-\lambda_4)}{(k_1-k_2)\,(k_3-k_2)^4},$$

$$\sigma x_3^2 = \frac{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)(k_3-\lambda_3)(k_3-\lambda_4)}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)} = A_3,$$

$$2\sigma x_3 x_4 = -\frac{\partial A_3}{\partial k_3} = A_3 \cdot \alpha_4, \quad \alpha_4 = -\left(\frac{1}{k_3-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{k_1-k_3} + \frac{1}{k_2-k_3}\right),$$

$$\sigma x_4^2 = \tfrac{1}{4} A_3 \alpha_4^2,$$

$$\sigma (2 x_3 x_5 + x_4^2) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 A_3}{\partial k_3^2} = A_3 \cdot A',$$

$$A' = \frac{1}{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)} + \cdots 6 \cdots + \frac{1}{(k_3-\lambda_1)(k_1-k_3)} + \cdots 8 \cdots$$

$$+ \frac{1}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)} + \frac{1}{(k_1-k_3)^2} + \frac{1}{(k_2-k_3)^2},$$

$$2\sigma x_3 x_5 = A_3 (A' - \tfrac{1}{4}\alpha_4^2) = A_3 \cdot \alpha_5, \quad \sigma x_5^2 = \tfrac{1}{4} A_3 \alpha_5^2,$$

$$\sigma (2 x_3 x_6 + 2 x_4 x_5) = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\partial^3 A_3}{\partial k_3^3} = A_3 \cdot A'',$$

$$A'' = -\left(\frac{1}{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)(k_3-\lambda_3)} + \cdots + \frac{1}{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)(k_1-k_3)} + \cdots 12 \cdots\right.$$

$$+ \frac{1}{(k_3-\lambda_1)(k_1-k_3)(k_2-k_3)} + \cdots + \frac{1}{(k_3-\lambda_1)(k_1-k_3)^2} + \cdots 8 \cdots$$

$$\left. + \frac{1}{(k_1-k_3)^2(k_2-k_3)} + \frac{1}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)^2} + \frac{1}{(k_1-k_3)^3} + \frac{1}{(k_2-k_3)^3}\right),$$

$$2\sigma x_4 x_5 = 2\sigma x_3 x_5 \cdot \frac{x_4}{x_3} = \tfrac{1}{2} A_3 \alpha_4 \cdot \alpha_5,$$

$$2\sigma x_3 x_6 = A_3 (A'' - \tfrac{1}{2}\alpha_4 A' + \tfrac{1}{8}\alpha_4^3) = A_3 \cdot \alpha_6, \quad \sigma x_6^2 = \tfrac{1}{4} A_3 \cdot \alpha_6^2.$$

Die Achsen der speziellen Komplexe $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ schneiden sich und gehören allen Komplexen der Schar an; diejenige von $x_3 = 0$ hat die besondere Stellung der Doppelgeraden auf der Singularitätenfläche, da sie den Komplex $\lambda = k_3$ leitet und da ihre einzige nicht verschwindende Koordinate x_6 nur in Verbindung mit der ihr nach der Identität zugehörigen x_3 auftritt.[1]) Die Leitlinie von $x_4 = 0$ hingegen gehört zwar

[1]) Vgl. den Beweis bei Fall 7.

gleichfalls allen Komplexen der Schar zu, liegt aber trotzdem nicht auf der Singularitätenfläche. Dies erklärt sich aus dem Umstande, dass der zu einem beliebigen Komplexe in der Ebene $y_1 = 0$ der beiden Achsen gehörige Kegelschnitt sich auf ihren Schnittpunkt zusammenzieht, so dass auch die Achse von $x_4 = 0$ als Tangente desselben und somit als Komplexlinie erscheint. Dieselbe Tatsache begründet weiter, dass jener Punkt als dreifacher Punkt sich ergibt, in dem alle Komplexkegelschnitte berühren, deren Ebenen durch $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ passieren.

Die logarithmische Differentiation liefert mittels einer Rechnung, deren Gang in den Fällen 42 und 48 noch klarer zutage tritt, weshalb wir auf sie verweisen können, zu dem Resultate:

$$S^2(dx_i) = 4(dx_1^2 + dx_2^2 + 2\,dx_3\,dx_6 + 2\,dx_4\,dx_5) = \sum_1^4{}^i M_i\,d\lambda_i^2$$

$$M_1 = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)^2} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda_1)^2} + \frac{2x_3x_6 + 2x_4x_5}{(k_3-\lambda_1)^2} + \frac{2\cdot(2x_3x_5 + x_4^2)}{(k_3-\lambda_1)^3}$$

$$+ \frac{3\cdot 2x_3x_4}{(k_3-\lambda_1)^4} + \frac{4\cdot x_3^2}{(k_3-\lambda_1)^5} = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\psi'}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)(k_3-\lambda_1)^4},$$

$$M_2 = \chi(\lambda_2), \quad M_3 = \chi(\lambda_3), \quad M_4 = \chi(\lambda_4).$$

Die Integralfläche bekommt die Gleichung:

$$W = \int \varphi_1\,d\lambda_1 + \int \varphi_2\,d\lambda_2 + \int \varphi_3\,d\lambda_3 + \int \varphi_4\,d\lambda_4 + C = 0,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{1}{(k_3-\lambda_i)^2}\sqrt{\frac{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}{(k_1-\lambda_i)(k_2-\lambda_i)}}.$$

Das war vorauszusehen, da auch hier wieder ein Grenzübergang vom „allgemeinen" Falle ausgeführt werden kann.

31. Für die Gruppierung [1(14)] besteht die Gleichung: 31. [1(14)]

$$\varphi = 0 = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2 + 2x_3x_6 + 2x_4x_5}{k_2-\lambda} + \frac{x_3^2 + 2x_3x_5}{(k_2-\lambda)^2}$$

$$+ \frac{2x_3x_4}{(k_2-\lambda)^3} + \frac{x_3^2}{(k_2-\lambda)^4} = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)^4},$$

woraus die Parameterdarstellung fliesst:

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)}{(k_2-k_1)^4},\ \sigma x_3^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)}{k_1-k_2} = A_2,$$

$$\sigma x_4^2 = \tfrac{1}{4} A_2 \alpha_4^2, \quad \alpha_4 = -\left(\frac{1}{k_2-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{k_1-k_2}\right),$$

$$\sigma (x_4^2 + 2 x_3 x_5) = A_2 \cdot A',$$

$$A' = \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)} + \cdots + \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_2)} + \cdots + \frac{1}{(k_1-k_2)^2},$$

$$\sigma x_5^2 = \tfrac{1}{4} A_2 \alpha_5^2, \quad \alpha_5 = A' - \tfrac{1}{4}\alpha_4^2,$$

$$\sigma (x_2^2 + 2 x_3 x_6 + 2 x_4 x_5) = A_2 \cdot A'',$$

$$A'' = -\left(\frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)} + \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_1-k_2)} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(k_1-k_2)^3}\right).$$

Die Linien t der Singularitätenfläche sind gekennzeichnet durch $\lambda_1 = \lambda_2 = k_2$ und gehören dem speziellen Komplexe $x_3 = 0$, dessen Achse die dreifache Gerade ist, und $x_2 = 0$ an, da hiefür $\sigma (x_2^2 + 2 x_3 x_6 + 2 x_4 x_5)$ den nämlichen Wert wie $\sigma \cdot 2 x_4 x_5$ annimmt, nämlich $-\frac{k_1 - \lambda_3}{(k_1-k_2)^2}$. Deshalb bringt der vierte involutorische Komplex $x_2 = \lambda_4 x_3$ die von früheren Fällen ähnlicher Art bekannte Zuordnung der Schnittpunkte einer Geraden g mit den Tangentialebenen $g\,t$. Weiter berechnen wir:

$$2\sigma x_3 x_6 = A_2 (A'' - \tfrac{1}{2}\alpha_5 \alpha_4 - \lambda_4^2) = A_2 \alpha_6,\ \sigma x_6^2 = \tfrac{1}{4} A_2 \alpha_6^2,$$

$$S^2 (d x_i) = \sum_1^4{}^i M_i\, d\lambda_i^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\psi'}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)^4}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2), \quad M_3 = \chi(\lambda_3),$$

$$M_4 = 4 x_3^2 = \frac{4(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)\psi}{k_1-k_2},$$

$$W = \int \varphi_1 \, d\lambda_1 + \int \varphi_2 \, d\lambda_2 + \int \varphi_3 \, d\lambda_3$$

$$+ 2\lambda_4 \cdot \sqrt{\frac{(k_2 - a)(k_2 - b)}{k_2 - k_1}} + C, \text{ wo } \varphi_i = \frac{1}{(k_2 - \lambda_i)^2} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)}{(k_1 - \lambda_i)(k_2 - \lambda_i)}}.$$

32. Einen Zerfall der Singularitätenfläche bedingt wieder 32. [(11)4] [(11)4] mit den Relationen:

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{k_1 - \lambda} + \frac{2\,x_3\,x_6 + 2\,x_4\,x_5}{k_2 - \lambda} + \frac{x_4^2 + 2\,x_3\,x_5}{(k_2 - \lambda)^2} + \frac{2\,x_3\,x_4}{(k_2 - \lambda)^3}$$

$$+ \frac{x_3^2}{(k_2 - \lambda)^4} = 0 = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\,\psi}{(k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda)^4},$$

$$\sigma\,(x_1^2 + x_2^2) = \sigma\,r^2 = \frac{(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)(k_1 - \lambda_3)}{(k_2 - k_1)^4},$$

$$\sigma\,x_3^2 = \frac{(k_2 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)(k_2 - \lambda_3)}{k_1 - k_2} = A_2, \quad \sigma\,x_i^2 = \tfrac{1}{4}\,A_2\,\alpha_i^2,$$

$$\alpha_6 = A'' - \tfrac{1}{2}\,\alpha_4\,A' + \tfrac{1}{8}\,\alpha_4^3, \quad i = 4, 5, 6;$$

α_4, α_5, A' und A'' haben die gleichen Werte wie im vorigen Falle.

Die Linien, für welche $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und deshalb gemäss der Identität auch $x_1 + i\,x_2 = 0$ ist, und welche die Ebene $y_1 = 0$ und den Punkt $v_2 = 0$ erfüllen, gehören allen Komplexen $\varphi = 0$ an, so dass sich diese beiden Gebilde von der Singularitätenfläche loslösen; wie im Falle 30 gehört die Achse von $x_4 = 0$ dennoch nicht zur Fläche, vielmehr ist, verglichen mit 26, an Stelle des Strahles und der Achse die Leitgerade von $x_3 = 0$ als Kuspidal-Strahl und -Achse getreten. Durch jeden Punkt der Fläche läuft eine Treffgerade t der Achsen von $x_1 + i\,x_2 = 0$ und $x_1 - i\,x_2 = 0$, die dem Punkte P einer Raumgeraden die Ebene $g\,t$ zuordnet durch den Komplex $x_1 = r\cos\vartheta$, $x_2 = r\sin\vartheta$, mittels dessen sich die Rechnung wie folgt gestaltet:

$$4\,(d\,x_1^2 + d\,x_2^2 + 2\,d\,x_3\,d\,x_6 + 2\,d\,x_4\,d\,x_5) = M_1\,d\,\lambda_1^2 + M_2\,d\,\lambda_2^2$$
$$+ M_3\,d\,\lambda_3^2 + M_4\,d\,\vartheta^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\psi}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)^4}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2), \quad M_3 = \chi(\lambda_3),$$

$$M_4 = 4r^2 = \frac{4(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)(k_1 - \lambda_3)}{(k_2 - k_1)^4},$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)^2} \cdot \sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)} + \cdots$$

$$+ \frac{2\vartheta}{(k_2 - k_1)^2} \cdot \sqrt{-(k_1 - a)(k_1 - b)} + C.$$

33. [(114)] **33.** In [(114)] ist

$$\varphi = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_3x_6 + 2x_4x_5}{k - \lambda} + \frac{x_4^2 + 2x_3x_5}{(k - \lambda)^2} + \frac{2x_3x_4}{(k - \lambda)^3}$$

$$+ \frac{x_3^2}{(k - \lambda)^4} = 0 = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\psi}{(k - \lambda)^4},$$

was sich wegen der Identität vereinfachen lässt:

$$x_4^2 + 2x_3x_5 + \frac{2x_3x_4}{k - \lambda} + \frac{x_3^2}{(k - \lambda)^2} = 0 = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\psi}{(k - \lambda)^2}.$$

Die Singularitätenfläche wird gebildet von dem doppelt zählenden Ebenenpaar $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ und Punktepaar $v_2 = 0$, $v_4 = 0$. Die Achse von $x_3 = 0$ zählt dreifach als singuläre Direktrix, eine weitere solche ist r, die Achse von $x_5 = 0$; sie und die zugehörige r', für welche $x_5' : x_6'' = (k_1 - \lambda) : 1$ ist, werden von den allgemeinen singulären Linien geschnitten, für welche die Beziehung gilt: $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$ $x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = k_1 - \lambda : -1 : 0 : 0$. Wir begegnen somit ähnlichen Verhältnissen wie im Falle [1(113)].

Die Kegelschnitte einer Ebene für die verschiedenen Komplexe λ berühren die Ebene $y_1 = 0$ in der Geraden $S_2 S_4$ und sich gegenseitig dreipunktig und gehen durch den Schnittpunkt mit $S_1 S_4$ (dabei muss die Tangente des einzelnen Kegelschnittes die durch seinen Komplex gegebene Direktrix r' treffen).

Durch Einführung der beiden Hilfskomplexe ϑ und λ_4 erledigt sich die Differentialaufgabe folgendermassen:

$$x_1 = r\cos\vartheta, \quad x_2 = r\sin\vartheta, \quad r = \lambda_4 \cdot x_3,$$

$$\sigma x_3^2 = (k-\lambda_1)(k-\lambda_2) = A, \quad \sigma x_i^2 = \tfrac{1}{4} A \cdot \alpha_i^2,$$

$$\alpha_4 = -\left(\frac{1}{k-\lambda_1} + \frac{1}{k-\lambda_2}\right), \quad A' = \frac{1}{(k-\lambda_1)(k-\lambda_2)}, \quad \alpha_5 = A' - \tfrac{1}{4}\alpha_4^2,$$

$$\alpha_6 = -\tfrac{1}{2}\alpha_4\alpha_5 - \lambda_4^2,$$

$$S^2(dx_i) = M_1 d\lambda_1^2 + M_2 d\lambda_2^2 + M_3 d\vartheta^2 + M_4 d\lambda_4^2,$$

$$M_1 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\psi}{(k-\lambda_1)^4}, \quad M_2 = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)\psi}{(k-\lambda_2)^4}, \quad M_3 = 4r^2 = \lambda_4^2 M_4,$$

$$M_4 = 4x_3^2 = 4(k-\lambda_1)(k-\lambda_2)\psi,$$

$$W = \int \frac{d\lambda_1}{(k-\lambda_1)^2}\sqrt{\frac{\lambda_1-a}{k-\lambda_1}} + \cdot + 2\sqrt{b}\cdot\vartheta + 2\int\sqrt{a-k-\frac{b}{\lambda_4^2}}\,d\lambda_4 + C.$$

VI. Kanonische Form [123].

In der sechsten kanonischen Form ist

$$P = y_1^2 + 2y_2y_3 + y_5^2 + 2y_4y_6 = 0,$$

$$\Omega = k_1y_1^2 + 2k_2y_2y_3 + k_3(y_5^2 + 2y_4y_6) - y_2^2 - 2y_4y_5 = 0,$$

$$\Omega' = k_1^2y_1^2 + 2k_2^2y_2y_3 + k_3^2(y_5^2 + 2y_4y_6) - 2k_2y_2^2 - 2\cdot 2k_3y_3y_5 + y_4^2 = 0,$$

umgeformt auf die Koordinaten der zugeordneten Linie:

$$\varrho x_1 = (k_1-\lambda)y_1, \quad \varrho x_2 = (k_2-\lambda)y_2, \quad \varrho x_3 = (k_3-\lambda)y_3 - y_2,$$

$$\varrho x_4 = (k_3-\lambda)y_4, \quad \varrho x_5 = (k_3-\lambda)y_5 - y_4, \quad \varrho x_6 = (k_3-\lambda)y_6 - y_5,$$

$$P = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{2x_2x_3}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{2x_2^2}{(k_2-\lambda)^3} + \frac{x_5^2 + 2x_4x_6}{(k_3-\lambda)^2} + \frac{2\cdot 2x_4x_5}{(k_3-\lambda)^3} + \frac{3\cdot x_4^2}{(k_3-\lambda)^4} = 0 = \chi,$$

$$\Omega - \lambda P = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{2x_2x_3}{k_2-\lambda} + \frac{x_5^2+2x_4x_6}{k_3-\lambda} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{2x_4x_5}{(k_3-\lambda)^2}$$

$$+ \frac{x_4^2}{(k_3-\lambda)^3} = 0 = \varphi,$$

$$\Omega' - 2\lambda\Omega + \lambda^2 \cdot P = x_1^2 + 2x_2x_3 + x_5^2 + 2x_4x_6 = 0 = J.$$

34. [123] **34.** Dem Schema [123] gemäss ist dieser Fall eine Verknüpfung von [11112] und [1113]; die Komplexgleichung:

$$\varphi = 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)^2(k_3-\lambda)^3}$$

leitet uns zu der Parameterdarstellung:

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)(k_1-\lambda_4)}{(k_2-k_1)^2(k_3-k_1)^3},$$

$$\sigma x_2^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)\cdot\cdot(k_2-\lambda_4)}{(k_1-k_2)(k_3-k_2)^3} = A_2, \quad \sigma x_4^2 = \frac{(k_3-\lambda_1)\cdot\cdot(k_3-\lambda_4)}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)^2} = A_3,$$

$$\alpha_3 = -\left(\frac{1}{k_2-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{k_1-k_2} + \frac{3}{k_3-k_2}\right),$$

$$\alpha_5 = -\left(\frac{1}{k_3-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{k_1-k_3} + \frac{2}{k_2-k_3}\right),$$

$$\sigma x_3^2 = \tfrac{1}{4} A_2 \alpha_3^2, \quad \sigma x_5^2 = \tfrac{1}{4} A_3 \cdot \alpha_5^2,$$

$$\sigma (x_5^2 + 2x_4x_6) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 A_3}{\partial k_3^2} = A_3 \cdot A',$$

$$A' = \frac{1}{(k_3-\lambda_1)(k_3-\lambda_2)} + \cdots\cdots + \frac{1}{(k_3-\lambda_1)(k_1-k_3)} + \cdots$$

$$+ \frac{2}{(k_3-\lambda_1)(k_2-k_3)} + \cdots + \frac{2}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)} + \frac{1}{(k_1-k_3)^2} + \frac{3}{(k_2-k_3)^2},$$

$$\sigma x_6^2 = \tfrac{1}{4} A_3 \alpha_6^2, \quad \alpha_6 = A' - \tfrac{1}{4}\alpha_5^2.$$

Die Achse von $x_4 = 0$, eine Rückkehrgerade, und die von $x_2 = 0$, eine Doppellinie, schneiden sich und zählen zu allen Komplexen. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = k_3$ bezeichnet zwei singuläre

Strahlen und zwei singuläre Achsen, wobei wie bei Fall 16 die Rückkehrgerade je einen Doppelpunkt und eine Doppelebene trägt; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = k_2$ gibt einen singulären Strahl und eine singuläre Achse allgemeiner Art. Die Geraden des Raumes gruppieren sich hier der Mannigfaltigkeit der Vorzeichen entsprechend zu vier, Punkte und Ebenen je zu zweien, woraus wieder erhellt, dass es zwei allgemeine Doppelpunkte und Doppelebenen gibt.

Die weitere Rechnung lautet:

$$S^2(dx_i) = 4(dx_1^2 + 2\,dx_2\,dx_3 + dx_5^2 + 2\,dx_4\,dx_6) = \sum_1^4{}^i M_i\,d\lambda_i^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\,\psi}{(k_1-\lambda_1)(k_2-\lambda_1)^2(k_3-\lambda_1)^3},\quad M_i = \chi(\lambda_i),$$

$$W = \sum_1^4{}^i \int \varphi_i\,d\lambda_i,\quad \text{wo } \varphi_i = \frac{1}{(k_2-\lambda_i)(k_3-\lambda_i)}\cdot\sqrt{\frac{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}{(k_1-\lambda_i)(k_3-\lambda_i)}}.$$

35. Für die Komplexgattung [1(23)] ist 35. [1(23)

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{2x_2x_3+2x_4x_6+x_5^2}{k_2-\lambda} + \frac{x_2^2+2x_4x_5}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_2-\lambda)^3}$$

$$= 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\,\psi}{(k_1-\lambda)(k_2-\lambda)^3},$$

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)}{(k_2-k_1)^3},\qquad \sigma x_4^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)}{k_1-k_2} = A_2,$$

$$\sigma(x_2^2 + 2x_4x_5) = A_2A,\qquad A = -\left(\frac{1}{k_2-\lambda_1}+\frac{1}{k_2-\lambda_2}+\frac{1}{k_1-k_2}\right).$$

Singuläre Linien sind doppelt zählend die Geraden, welche die Ebene $y_1 = 0$ und den Punkt $v_2 = 0$ erfüllen; die übrigen sind durch die zwei allgemeinen linearen Komplexe $\frac{x_1}{x_4} = +\frac{(k_1-\lambda)\,i}{(k_2-k_1)(k_2-\lambda)}$ aus den Treffgeraden des Kegelschnittes in $y_1 = 0$ und aus den Tangenten des Kegels mit $v_2 = 0$ als Spitze herausgehoben.

Da der gegenwärtige Fall sich von dem Fall 22 nur darin unterscheidet, dass die beiden Erzeugenden, welche die Bestandteile der Singularitätenfläche, Kegel und Kegelschnitt, gemein haben, in eine zusammengefallen sind, ist die dort gegebene Konstruktion von Komplexkegelschnitten auch hier anwendbar. Wie in jenem Falle, kann auch hier nur ein einziger involutorischer Komplex $x_2 = \lambda_3 x_4$ auftreten, weil $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$ spezielle Komplexe mit sich schneidenden Achsen sind; wir sind daher auf die gleiche Rechnungsweise wie dort angewiesen.

Die lineare Transformation, bei welcher jeder Komplex, also auch x_4, $x_2^2 + 2 x_4 x_5$ und $2 x_2 x_3 + 2 x_4 x_6 + x_5^2$ in sich übergehen, ergibt sich durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten als:

$$x_4 = \eta_4, \quad x_2 = \eta_2 + \alpha \eta_4, \quad x_5 = \eta_5 - \alpha \eta_2 - \frac{\alpha^2}{2} \eta_4,$$

$$x_3 = \eta_3 - \frac{\alpha^2}{2} \eta_2 + \alpha \eta_5 + \gamma \eta_4,$$

$$x_6 = \eta_6 - \alpha \eta_3 - \gamma \eta_2 - \frac{\alpha^2}{2} \eta_5 - \left(\frac{\alpha^4}{8} + \alpha \gamma \right) \eta_1;$$

dies gibt bei n maliger Wiederholung:

$${}^n\xi_4 = \eta_4, \quad {}^n\xi_2 = \eta_2 + n \alpha \eta_4, \quad {}^n\xi_5 = \eta_5 - n \alpha \eta_2 - \frac{n^2}{2} \alpha^2 \eta_4,$$

$${}^n\xi_3 = \eta_3 + n \alpha \eta_5 - \frac{n^2}{2} \alpha^2 \eta_2 + n \gamma \eta_4 - \frac{(n-1)\, n\, (n+1)}{3!} \alpha^3 \eta_4,$$

$${}^n\xi_6 = \eta_6 - n \alpha \eta_3 - \frac{n^2}{2} \alpha^2 \eta_5 + \frac{(n-1)\, n\, (n+1)}{3!} \alpha^3 \eta_2 - n \gamma \eta_2$$

$$+ \frac{(n-2)\, n^2\, (n+2)}{4!} \alpha^4 \eta_4 - n^2 \alpha \gamma \eta_4.$$

Der Schluss von n auf $n + 1$ bestätigt diese Werte; wenn man n als variabel betrachtet und durch $d n$ ersetzt, bekommt man bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung:

$$d\eta_4 = 0, \quad d\eta_2 = \alpha\,\eta_4\,dn, \quad d\eta_5 = -\alpha\,\eta_2\,dn,$$

$$d\eta_3 = \left(\alpha\,\eta_5 + \gamma\,\eta_4 + \frac{\alpha^3}{6}\,\eta_4\right) dn,$$

$$d\eta_6 = \left(-\alpha\,\eta_3 - \gamma\,\eta_2 - \frac{\alpha^3}{6}\,\eta_2\right) dn.$$

Die Integration liefert für η genau die gleichen Formeln wie für ${}^n\xi$, wenn man auf der rechten Seite für η den konstanten Wert η' setzt.

Die Differentialgleichung des Schneidens, wegen $dx_1 = 0$ und $d\eta_4 = 0$ einfach:

$$2\,d\eta_2\,d\eta_3 + d\eta_5^2 = 0 = dn^2\left[\alpha^2(\eta_2^2 + 2\,\eta_4\,\eta_5) + \left(\frac{\alpha^4}{3} + 2\,\alpha\,\gamma\right)\eta_4^2\right]$$

oder

$$dn^2 \cdot A_2 \cdot \left[\alpha^2 A + \frac{\alpha^4}{3} + 2\,\alpha\,\gamma\right] = 0,$$

ist erfüllt für

$$\gamma = -\tfrac{1}{2}\left(A\,\alpha + \frac{\alpha^3}{3}\right), \quad A = -\left(\frac{1}{k_2 - \lambda_1} + \frac{1}{k_2 - \lambda_2} + \frac{1}{k_1 - k_2}\right).$$

In die Lösung:

$$\sigma\,x_1'^2 = \frac{(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2)}{(k_2 - k_1)^3}, \quad \sigma\,x_4'^2 = \sigma\,\eta_4'^2 = \frac{(k_2 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)}{k_1 - k_2},$$

$$\eta_4 = \eta_4',$$

$$\eta_2 = \eta_2' + n\,\alpha\,\eta_4',$$

$$\eta_5 = \eta_5' - n\,\alpha\,\eta_2' - \frac{n^2}{2}\alpha^2\,\eta_4',$$

$$\eta_3 = \eta_3' + n\,\alpha\,\eta_5' - \frac{n^2}{2}\alpha^2\,\eta_2' - \frac{n^3}{3!}\alpha^3\,\eta_4' - \frac{A\,\alpha}{2}\,n\,\eta_4'.$$

$$\eta_6 = \eta_6' - n\,\alpha\,\eta_3' - \frac{n^2}{2}\alpha^2\,\eta_5' + \frac{n^3}{3!}\alpha^3\,\eta_2' + \frac{n^4}{4!}\alpha^4\,\eta_4' + \frac{A\,\alpha}{2}\,n\,\eta_2'$$

$$+ \frac{A\,\alpha^2}{2}\,n^2\,\eta_4'$$

gehen somit die drei Konstanten λ_1, λ_2, α ein, wenn η' eine beliebige Gerade der Kongruenz λ_1, λ_2 bedeutet.

36. [2(13)] **36.** Fall [2(13)] hat die Gleichungen:

$$\varphi = 0 = \frac{2\,x_2\,x_3}{k_1-\lambda} + \frac{x_1^2+x_5^2+2\,x_4\,x_6}{k_2-\lambda} + \frac{x_2^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{2\,x_4\,x_5}{(k_2-\lambda)^2}$$
$$+ \frac{x_4^2}{(k_2-\lambda)^3} = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\,\psi}{(k_1-\lambda)^2(k_2-\lambda)^3},$$

$$\sigma\,x_2^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)}{(k_2-k_1)^3} = A_1,$$

$$\sigma\,x_4^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)}{(k_1-k_2)^2} = A_2,$$

$$2\,\sigma\,x_2\,x_3 = -\frac{\partial A_1}{\partial k_1} = A_1\cdot A,\quad A = -\left(\frac{1}{k_1-\lambda_1}+\cdots+\frac{3}{k_2-k_1}\right),$$

$$2\,\sigma\,x_4\,x_5 = -\frac{\partial A_2}{\partial k_2} = A_2\cdot\alpha_5,\quad \alpha_5 = -\left(\frac{1}{k_2-\lambda_1}+\cdots+\frac{2}{k_1-k_2}\right),$$

$$\sigma\,(x_1^2+x_5^2+2\,x_4\,x_6) = A_2\cdot A',\quad A' = \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)}$$
$$+\cdots+\frac{2}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_2)}+\cdots+\frac{3}{(k_1-k_2)^2}.$$

Jeder Punkt der Fläche schickt eine in der Fläche liegende Gerade $\lambda_1=\lambda_2=k_2$ nach der Rückkehrgeraden $S_2\,S_3$, welche der speziellen Kongruenz $x_4=0$, $x_1=0$ angehört, weil hiefür $\sigma\,(x_1^2+x_5^2+2\,x_4\,x_5)$ und $\sigma\,x_5^2$ den gleichen Wert $\frac{k_2-\lambda_3}{(k_1-k_2)^3}$ annehmen.

Da die Geraden $x_4=0$, $x_2=0$, $x_1\pm i\,x_5=0$, die in Ebene $y_1=0$ liegen bezw. durch den Punkt $v_2=0$ laufen, allen Komplexen angehören, ist ersichtlich, dass sich von der Singularitätenfläche diese Ebene und dieser Punkt abtrennen müssen. Als vierter involutorischer Komplex bietet sich dar $x_1=\lambda_4\,x_4$, er ordnet einem Punkte der Geraden g die Ebene $g\,t$ zu. So wird noch

$$2\,\sigma\,x_4\,x_6 = A_2\,(A'-\tfrac{1}{4}\,\alpha_5^2-\lambda_4^2) = A_2\,\alpha_6$$

und weiter:

$$S^2(dx_i) = \sum_1^4{}^i M_i\, d\lambda_i^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(k_1-\lambda_1)^2(k_2-\lambda_1)^3}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2), \quad M_3 = \chi(\lambda_3),$$

$$M_4 = 4x_4^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)\psi}{(k_1-k_2)^2},$$

$$W = \sum_1^3{}^i \int \varphi_i\, d\lambda_i + \frac{2\lambda_4}{k_1-k_2}\sqrt{-(k_2-a)(k_2-b)} + C,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}}{(k_1-\lambda_i)(k_2-\lambda_i)^2}.$$

37. Eine einfache Verknüpfung von [111(12)] und [1113] gibt Fall [(12)3]: **37.** [(12)3

$$\varphi = \frac{x_1^2+2x_2x_3}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{2x_4x_6+x_5^2}{k_2-\lambda} + \frac{2x_4x_5}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_2-\lambda)^3} = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\psi}{(k_1-\lambda)^2(k_2-\lambda)^3},$$

$$\sigma x_2^2 = A_1, \quad \sigma(x_1^2+2x_2x_3) = A_1\cdot A, \quad \sigma x_1^2 = A_2,$$

$$2\sigma x_4x_5 = A_2\cdot a_5, \quad \sigma(2x_4x_6+x_5^2) = A_2A',$$

$$2\sigma x_4x_6 = A_2a_6, \quad a_6 = A' - \tfrac{1}{4}a_5^2,$$

wobei A_1, A_2, A, a_5 und A' wie im vorhergehenden Falle gebildet sind.

Die sich schneidenden Achsen von $x_2=0$ und $x_4=0$ haben wie früher die Eigenschaft der doppelten Doppelgeraden bezw. der Rückkehrerzeugenden. Die Geraden t der Fläche sind $\lambda_1=\lambda_2=k_1$, entnommen der speziellen Kongruenz $x_1=0$, $x_2=0$. Der neu hinzutretende involutorische Komplex $x_1=\lambda_4x_2$ ordnet dem Punkte einer Geraden g die Ebene gt zu.

Durch ihn wird ferner:

$$\sigma x_1^2 = A_1\lambda_4^2, \qquad S^2(dx_i) = \sum_1^4{}^i M_i\, d\lambda_i^2,$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\psi}{(k_1 - \lambda_1)^2 (k_2 - \lambda_1)^3}, \quad M_2 = \chi(\lambda_2), \quad M_3 = \chi(\lambda_3),$$

$$M_4 = 4 x_2^2, \qquad W = \sum_1^3{}^i \int \varphi_i \, d\lambda_i + 2\lambda_4 \cdot \sqrt{\frac{(k_1 - a)(k_1 - b)}{(k_1 - k_2)^3}} + C,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{1}{(k_1 - \lambda_i)(k_2 - \lambda_i)} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)}{(k_1 - \lambda_i)(k_2 - \lambda_i)}}.$$

[(123)] **38.** Bei [(123)] ist

$$\varphi = 0 = \frac{x_1^2 + 2 x_2 x_3 + 2 x_4 x_6 + x_5^2}{k - \lambda} + \frac{x_2^2 + 2 x_4 x_5}{(k - \lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k - \lambda)^3} = \frac{(\lambda - \lambda_1)\psi}{(k - \lambda)^3}$$

oder

$$x_2^3 + 2 x_4 x_5 + \frac{x_4^2}{k - \lambda} = \frac{(\lambda - \lambda_1)\psi}{k - \lambda},$$

$$\sigma x_4^2 = k - \lambda_1 = A_1, \quad \sigma (x_2^2 + 2 x_4 x_5) = A_1 A, \quad A = -\frac{1}{k - \lambda_1}.$$

Die zerfallende Kongruenz $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ ist allen Komplexen gemeinsam, so dass die Singularitätenfläche aus der Ebene $y_1 = 0$ und dem Punkte $v_2 = 0$ je vierfach zählend besteht. Die Komplexkegelschnitte in einer beliebigen Ebene gehen alle durch den Schnittpunkt mit der vierfachen singulären Direktrix, der Achse von $x_4 = 0$, berühren dort die Ebene und sich gegenseitig vierpunktig; durch eine gegebene Gerade ist somit der Komplex in der Tat eindeutig festgelegt.[1])

Zur Bestimmung der Integralfläche dienen uns die Formeln von Fall 35, wobei die drei Konstanten $\sigma x_1'^2$, λ_1 und α auftreten.

VII. Kanonische Form [222].

Wir schreiben:

$$P = 2 y_1 y_2 + 2 y_3 y_4 + 2 y_5 y_6 = 0$$

$$\Omega = 2 k_1 y_1 y_2 + 2 k_2 y_3 y_4 + 2 k_3 y_5 y_6 - y_1^2 - y_3^2 - y_5^2 = 0$$

$$\Omega' = 2 k_1^2 y_1 y_2 + 2 k_2^2 y_3 y_4 + 2 k_3^2 y_5 y_6 - 2 k_1 y_1^2 - 2 k_2 y_3^2 - 2 k_3 y_5^2 = 0$$

und machen die Substitution:

[1]) Die Konstruktion ist bei Fall 15 angegeben.

$$\varrho x_1 = (k_1 - \lambda) y_1, \quad \varrho x_3 = (k_2 - \lambda) y_3, \quad \varrho x_5 = (k_3 - \lambda) y_5,$$
$$\varrho x_2 = (k_1 - \lambda) y_2 - y_1, \quad \varrho x_4 = (k_2 - \lambda) y_4 - y_3, \quad \varrho x_6 = (k_3 - \lambda) y_6 - y_5.$$

So erhalten wir die neuen Gleichungen:

$$P = \frac{2 x_1 x_2}{(k_1 - \lambda)^2} + \frac{2 x_3 x_4}{(k_2 - \lambda)^2} + \frac{2 x_5 x_6}{(k_3 - \lambda)^2} + \frac{2 x_1^2}{(k_1 - \lambda)^3} + \frac{2 x_3^2}{(k_2 - \lambda)^3}$$
$$+ \frac{2 x_5^2}{(k_3 - \lambda)^3} = 0 = \chi,$$

$$\Omega - \lambda P = \frac{2 x_1 x_2}{k_1 - \lambda} + \frac{2 x_3 x_4}{k_2 - \lambda} + \frac{2 x_5 x_6}{k_3 - \lambda} + \frac{x_1^2}{(k_1 - \lambda)^2} + \frac{x_3^2}{(k_2 - \lambda)^2} + \frac{x_5^2}{(k_3 - \lambda)^2} = 0 = \varphi,$$

$$\Omega' - 2\lambda\Omega + \lambda^2 P = 2 x_1 x_2 + 2 x_3 x_4 + 2 x_5 x_6 = 0 = J.$$

39. Für den allgemeinen Fall dieser Form [222] ist zu 39. [222] setzen:

$$\varphi = 0 = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)\psi}{(k_1 - \lambda)^2 (k_2 - \lambda)^2 (k_3 - \lambda)^2},$$

$$\sigma x_1^2 = A_1, \qquad \sigma x_3^2 = A_2, \qquad \sigma x_5^2 = A_3,$$

$$2\sigma x_1 x_2 = A_1 B_1, \quad 2\sigma x_3 x_4 = A_2 B_2, \quad 2\sigma x_5 x_6 = A_3 B_3,$$

wobei

$$A_i = \frac{(k_i - \lambda_1) \ldots (k_i - \lambda_4)}{(k_m - k_i)^2 (k_n - k_i)^2},$$

$$B_i = -\left(\frac{1}{k_i - \lambda_1} + \cdots + \frac{2}{k_m - k_i} + \frac{2}{k_n - k_i}\right)$$

und $i \neq m \neq n$ die Zahlen 1, 2, 3 bedeuten.

Die sich schneidenden Achsen von $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_5 = 0$ geben sich sofort als Doppelgerade zu erkennen; die Geraden, welche alle drei treffen, erfüllen je nach der Definition eine Doppelebene oder einen Doppelpunkt der restierenden Fläche 3. Ordnung bezw. Klasse, wodurch im ganzen, wie immer, die Singularitätenfläche von 4. Ordnung und Klasse erscheint; sie ist im einzelnen bei Weiler beschrieben. Die Zuordnung

von Punkt und Tangentialebene wird durch das Abspalten jener Ebene oder jenes Punktes nicht beeinträchtigt.

Es gestaltet sich die Differentialgleichung wie folgt:

$$S^2(dx_i) = 4 \cdot (2\,dx_1\,dx_2 + 2\,dx_3\,dx_4 + 2\,dx_5\,dx_6) = \sum_1^4{}^i M_i\,d\lambda_i^2 = 0$$

$$M_1 = \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\,\psi}{(k_1-\lambda_1)^2(k_2-\lambda_1)^2(k_3-\lambda_1)^2}, \quad M_i = \chi(\lambda_i),$$

$$W = \sum_1^4{}^i \int \varphi_i\,d\lambda_i + C = 0,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}}{\Lambda_i}, \quad \Lambda_i = (k_1-\lambda_i)(k_2-\lambda_i)(k_3-\lambda_i).$$

Es sei für den vorliegenden Fall die Aufgabe gestellt, die Umhüllungskurven bezw. die von ihnen erzeugten Developpablen der singulären Linien eines Komplexes a zu bestimmen; wir nehmen dafür $\lambda_3 = \lambda_4 = a = b$ und haben:

$$\int \frac{(\lambda_1 - a)\,d\lambda_1}{\Lambda_1} + \int \frac{(\lambda_2 - a)\,d\lambda_2}{\Lambda_2} + c = 0.$$

Die Integration gibt wegen der Partialbruchzerlegung

$$\frac{\lambda_j - a}{\Lambda_j} = -\frac{a_1}{k_1-\lambda_j} - \frac{a_2}{k_2-\lambda_j} - \frac{a_3}{k_3-\lambda_j}$$

die Gleichung:

$$\sum_1^3{}^i a_i [\lg(k_i-\lambda_1) + \lg(k_i-\lambda_2)] + c = 0,$$

wobei

$$a_i = \frac{a-k_i}{(k_i-k_m)(k_i-k_n)},$$

oder, wenn man wieder die ursprünglichen Koordinaten x einführt und delogarithmiert:

$$\left(\frac{\sigma x_1^2}{a_1}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{\sigma x_2^2}{a_2}\right)^{a_2} \cdot \left(\frac{\sigma x_3^2}{a_3}\right)^{a_3} = C.$$

40. Fall [2(22)] bietet die Beziehungen: 40. [2(22)]

$$\varphi = \frac{2x_1x_2}{k_1-\lambda} + \frac{2x_3x_4 + 2x_5x_6}{k_2-\lambda} + \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{x_3^2+x_5^2}{(k_2-\lambda)^2} = 0$$

$$= \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\psi}{(k_1-\lambda)^2(k_2-\lambda)^2}, \quad \sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)}{(k_2-k_1)^2},$$

$$\sigma(x_3^2+x_5^2) = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)}{(k_1-k_2)^2} = A_2, \quad \sigma(2x_3x_4 + 2x_5x_6) = A_2 B,$$

$$B = -\left(\frac{1}{k_2-\lambda_1} + \frac{1}{k_2-\lambda_2} + \frac{2}{k_1-k_2}\right).$$

Bei der Definition: $x_1 = p_{34}$, $x_2 = p_{42}$, $x_3 = p_{23}$ (Weiler B) erscheint die Singularitätenfläche als Degeneration derjenigen des Falles [(11)(11)2]; die F_2 hat sich zusammengezogen auf den Kegelschnitt: $v_1^2 - \lambda_1^2(v_3^2 + v_4^2) = 0$ in der Ebene E oder $y_2 = 0$. Die Singularitätenfläche besteht dann aus E, doppelt zählend, und den den Kegelschnitt berührenden Ebenen E' und E'' $y_3 \mp i\, y_4 = 0$, als Klassenfläche aus dem Schnittpunkt S_1 der 3 Ebenen, welcher doppelt rechnet, und dem Kegelschnitte. Bei der anderen Koordinatenbestimmung Weilers (A) ergibt sich das Duale. Wie in Fall 13 kann die Fläche durch ∞^1 Korrelationen erzeugt werden, wobei dem S_1 als Punkt von E' bezw. E'' die durch ihn gehende Kegelschnittstangente in E'' bezw. E' konjugiert ist. Dem Schnittpunkt 1 einer Geraden g mit E' hat man die Schnittlinie einer der beiden Tangentialebenen von g an den Kegelschnitt zuzuweisen und bekommt dadurch eine bestimmte Korrelation. Bei Einführung eines involutorischen Komplexes: $x_3 = \lambda_3 x_5$, des einzigen, der hier möglich ist, da $x_3 = 0$ und $x_5 = 0$ spezielle Komplexe darstellen, wird die Zuordnung der Punkte, die g mit E', E'' und E gemeinsam hat, nämlich 1, 2 und 3 und der Ebenen I, II und III von g an den Kegelschnitt und durch S_1 die folgende:

	1	2	3	
λ_1	I	II	III	
λ_2	II	I	III	wie im Falle 23.
λ_3	III	III	III	

Wie dort berechnen sich auch die Koordinaten der die Integralfläche erzeugenden Geraden:

Durch die Substitution:

$$\xi_3 = x_3 + i\,x_5,\quad \xi_5 = x_3 - i\,x_5,\quad \xi_4 = x_4 + i\,x_6,\quad \xi_6 = x_4 - i\,x_6$$

geht φ über in:

$$\varphi = \frac{2\,x_1\,x_2}{k_1-\lambda} + \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)^2} + \frac{\xi_3\,\xi_6 + \xi_4\,\xi_5}{k_2-\lambda} + \frac{\xi_3\,\xi_5}{(k_2-\lambda)^2}.$$

Die Integralflächen verwandeln sich ineinander bei der linearen Transformation, welche $\xi_3 = 0$, $\xi_5 = 0$ und die Kongruenzen dieser Komplexe mit $\xi_4 = 0$ bezw. $\xi_6 = 0$ festhält, so bekommt man genau die gleiche Darstellung wie bei Fall 23, worin nur k_1 für k_1 und k_2, k_2 für k_3 zu schreiben ist.

41. [(222)] **41.** Der Fall [(222)] liefert mit

$$\varphi = \frac{2\,x_1\,x_2 + 2\,x_3\,x_4 + 2\,x_5\,x_6}{k_1-\lambda} + \frac{x_1^2 + x_3^2 + x_5^2}{(k_1-\lambda)^2} = 0 = \frac{\psi}{(k_1-\lambda)^2}$$

oder

$$x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 = 0$$

einen speziellen Komplex und zwar, da $x_1 = 0 = x_3 = x_5$ Achsen besitzen, die sich gegenseitig schneiden, die Gesamtheit der Treffgeraden eines Kegelschnittes oder aber die der Tangenten eines Kegels.

Lineare Transformationen, welche die Identität und den Komplex in sich überführen, sind hier

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{const.} = \eta_1, & x_2 &= \eta_2 + \lambda\,\eta_3 - \mu\,\eta_5, \\ x_3 &= \text{const.} = \eta_3, & x_4 &= \eta_4 + \nu\,\eta_5 - \lambda\,\eta_1, \\ x_5 &= \text{const.} = \eta_5, & x_6 &= \eta_6 + \mu\,\eta_1 - \nu\,\eta_3 \end{aligned}$$

und bei n maliger Wiederholung

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1, & \xi_2 &= \eta_2 + n\,\lambda\,\eta_3 - n\,\mu\,\eta_5, \\ \xi_3 &= \eta_3, & \xi_4 &= \eta_4 + n\,\nu\,\eta_5 - n\,\lambda\,\eta_1, \\ \xi_5 &= \eta_5, & \xi_6 &= \eta_6 + n\,\mu\,\eta_1 - n\,\nu\,\eta_3. \end{aligned}$$

Dies ist auch das Ergebnis, wenn man die Differentiale für unendlich kleines n integriert. Wir gelangen jedoch offenbar nur wieder zu Geraden desselben Komplexes und zu keinen eigentlichen Integralflächen.

VIII. Kanonische Form [15].

Hier ist:

$$P = y_1^2 + 2\,y_2\,y_6 + 2\,y_3\,y_5 + y_4^2 = 0,$$
$$\Omega = k_1\,y_1^2 + 2\,k_2\,y_2\,y_6 + 2\,k_2\,y_3\,y_5 + k_2\,y_4^2 - 2\,y_2\,y_5 - 2\,y_3\,y_4 = 0,$$
$$\Omega' = k_1^2\,y_1^2 + k_2^2\,(2\,y_2\,y_6 + 2\,y_3\,y_5 + y_4^2) - 2\,k_2\,(2\,y_2\,y_5 + 2\,y_3\,y_4) + 2\,y_2\,y_4 + y_3^2.$$

Durch Einführung der zugeordneten Linie x:

$$\varrho\,x_1 = (k_1 - \lambda)\,y_1, \quad \varrho\,x_2 = (k_2 - \lambda)\,y_2, \quad \varrho\,x_3 = (k_2 - \lambda)\,y_3 - y_2,$$
$$\varrho\,x_4 = (k_2 - \lambda)\,y_4 - y_3, \quad \varrho\,x_5 = (k_2 - \lambda)\,y_5 - y_4, \quad \varrho\,x_6 = (k_2 - \lambda)\,y_6 - y_5$$

kommen die neuen Ausdrücke:

$$P = \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{2\,x_2\,x_6 + 2\,x_3\,x_5 + x_4^2}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{2\cdot(2\,x_2\,x_5 + 2\,x_3\,x_4)}{(k_2-\lambda)^3} + \frac{3\cdot(2\,x_2\,x_4 + x_3^2)}{(k_2-\lambda)^4} + \frac{4\cdot 2\,x_2\,x_3}{(k_2-\lambda)^5} + \frac{5\cdot x_2^2}{(k_2-\lambda)^6} = \chi,$$

$$\Omega - \lambda P = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{2\,x_2\,x_6 + 2\,x_3\,x_5 + x_4^2}{k_2-\lambda} + \frac{2\,x_2\,x_5 + 2\,x_3\,x_4}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{2\,x_2\,x_4 + x_3^2}{(k_2-\lambda)^3} + \frac{2\,x_2\,x_3}{(k_2-\lambda)^4} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda)^5} = \varphi,$$

$$\Omega' - 2\,\lambda\,\Omega + \lambda^2 P = x_1^2 + 2\,x_2\,x_6 + 2\,x_3\,x_5 + x_4^2 = J.$$

42. Bei dem allgemeinen Falle [15] ist zu nehmen: 42. [15]

$$\varphi = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{2\,x_2x_6 + 2\,x_3x_5 + x_4^2}{k_2-\lambda} + \frac{2\,x_2x_5 + 2\,x_3x_4}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{2\,x_2x_4 + x_3^2}{(k_2-\lambda)^3} + \frac{2\,x_2\,x_3}{(k_2-\lambda)^4} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda)^5} = 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,(\lambda-\lambda_3)\,(\lambda-\lambda_4)\,\psi}{(k_1-\lambda)\,(k_2-\lambda)^5},$$

$$\sigma x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)(k_1-\lambda_2)(k_1-\lambda_3)(k_1-\lambda_4)}{(k_2-k_1)^5},$$

$$\sigma x_2^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)(k_2-\lambda_4)}{k_1-k_2} = A_2,$$

$$\sigma x_i^2 = \tfrac{1}{4} A_2 \alpha_i^2, \quad i = 3, 4, 5, 6;$$

$$2\sigma x_2 x_3 = -\frac{\partial A_2}{\partial k_2} = A_2 \cdot \alpha_3, \quad \alpha_3 = -\left(\frac{1}{k_2-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{k_1-k_2}\right).$$

$$\sigma(2x_2x_4 + x_3^2) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 A_2}{\partial k_2^2} = A_2 A', \quad \alpha_4 = A' - \tfrac{1}{4}\alpha_3^2.$$

$$A' = \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)} + \cdots 6 \cdots + \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_2)} + \cdots + \frac{1}{(k_1-k_2)^2}.$$

$$\sigma(2x_2x_5 + 2x_3x_4) = -\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 A_2}{\partial k_2^3} = A_2 \cdot A'',$$

$$A'' = -\left(\frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)} + \cdots + \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_1-k_2)}\right.$$
$$\left. + \cdots 6 \cdots + \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(k_1-k_2)^3}\right),$$

$$\alpha_5 = A'' - \tfrac{1}{2}\alpha_3\alpha_4 = A'' - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A' + \tfrac{1}{8}\alpha_3^3.$$

$$\sigma(2x_2x_6 + 2x_3x_5 + x_4^2) = \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 A_2}{\partial k_2^2} = A_2 A''',$$

$$A''' = \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)(k_2-\lambda_4)} + \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)(k_1-k_2)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_1-k_2)^2} + \cdots 6 \cdots + \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_2)^3} + \cdots + \frac{1}{(k_1-k_2)^4},$$

$$\alpha_6 = A''' - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A'' + \tfrac{3}{8}\alpha_3^2 A' - \tfrac{5}{64}\alpha_3^4 - \tfrac{1}{4}A'^2.$$

Wie bei Fall 30 gehören die Achsen der speziellen Komplexe $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$ allen Komplexen der Schar an, doch hat nur die letztere die bevorzugte Stellung der Doppelgeraden, während die erstere nur insofern Komplexgerade ist (sie liegt

nicht auf der Singularitätenfläche), als sie durch den dreifachen Punkt geht, in welchen der Komplexkegelschnitt der Ebene $y_1 = 0$ zusammengeschrumpft ist.

Die Linien des Raumes gruppieren sich nur mehr zu zweien durch die gegebene Koordinatendarstellung, da das Zeichen von x_2 die von x_3, x_4, x_5 und x_6 mitbestimmt und nur x_1 frei lässt; die Folge davon ist, dass nur noch ein einfacher Knoten und dual eine einfache Doppeltangentialebene zutage tritt.

Die Differentiation gibt:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_1}{x_1} = -\sum_1^4{}^i \frac{d\lambda_i}{k_1 - \lambda_i}, \qquad \frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_2}{x_2} = -\sum_1^4{}^i \frac{d\lambda_i}{k_2 - \lambda_i},$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_3}{x_3} = -\sum_1^4{}^i \left(\frac{d\lambda_i}{k_2 - \lambda_i} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^2} \cdot \frac{2}{a_3}\right),$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_4}{x_4} = -\sum_1^4{}^i \left(\frac{d\lambda_i}{k_2 - \lambda_i} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^2} \cdot \frac{a_3}{a_4} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^3} \cdot \frac{2}{a_4}\right),$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_5}{x_5} = -\sum_1^4{}^i \left(\frac{d\lambda_i}{k_2 - \lambda_i} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^2} \cdot \frac{a_4}{a_5} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^3} \cdot \frac{a_3}{a_5} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^4} \cdot \frac{2}{a_5}\right),$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{dx_6}{x_6} = -\sum_1^4{}^i \left(\frac{d\lambda_i}{k_2 - \lambda_i} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^2} \cdot \frac{a_5}{a_6} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^3} \cdot \frac{a_4}{a_6} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^4} \cdot \frac{a_3}{a_6} + \frac{d\lambda_i}{(k_2 - \lambda_i)^5} \cdot \frac{2}{a_6}\right).$$

Es entstehen so die Gleichungen:

$$S^2(dx_i) = 4(dx_1^2 + 2\,dx_2\,dx_6 + 2\,dx_3\,dx_5 + dx_4^2) = \sum_1^4{}^i M_i\,d\lambda_i^2,$$

$$M_i = \chi(\lambda_i), \quad \chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)\,\psi}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_1)^5}, \text{ denn}$$

die Koeffizienten der doppelten Produkte $2\,d\lambda_i\,d\lambda_j$ werden:

$$A_{ij} = \frac{\varphi(\lambda_i) - \varphi(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} = 0; \quad W = \sum_1^4 {}^i \int q_i \, d\lambda_i + C = 0,$$

$$\text{wo} \quad \varphi_i = \frac{1}{(k_2 - \lambda_i)^2} \sqrt{\frac{(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)}{(k_1 - \lambda_i)(k_2 - \lambda_i)}}.$$

Zum gleichen Ziele hätte die Ableitung aus dem allgemeinen Falle geführt vermöge eines ähnlichen Grenzüberganges wie in Fall 48, weshalb wir hier darauf verweisen wollen.

Dort ist auch die Rechnung ersichtlich, welche zu den Werten von M_i und A_{ij} führt.

43. [(15)] **43.** Fall [(15)] ist charakterisiert durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{x_1^2 + 2x_2x_6 + 2x_3x_5 + x_4^2}{k - \lambda} + \frac{2x_2x_5 + 2x_3x_4}{(k-\lambda)^2} + \frac{2x_2x_4 + x_3^2}{(k-\lambda)^3}$$

$$+ \frac{2x_2x_3}{(k-\lambda)^4} + \frac{x_2^2}{(k-\lambda)^5} = 0 = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\psi}{(k-\lambda)^5}$$

oder

$$2x_2x_5 + 2x_3x_4 + \frac{2x_2x_4 + x_3^2}{k-\lambda} + \frac{2x_2x_3}{(k-\lambda)^2} + \frac{x_2^2}{(k-\lambda)^3} = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\psi}{(k-\lambda)^3};$$

daraus entspringt zunächst die Koordinatendarstellung:

$$\sigma x_2^2 = (k - \lambda_1)(k - \lambda_2)(k - \lambda_3) = A_1,$$

$$2\sigma x_2 x_3 = -\frac{\partial A_1}{\partial k} = A_1 \cdot \alpha_3, \quad \alpha_3 = -\left(\frac{1}{k - \lambda_1} + \frac{1}{k - \lambda_2} + \frac{1}{k - \lambda_3}\right),$$

$$\sigma(2x_2x_4 + x_3^2) = A_1 \cdot A', \quad A' = \frac{1}{(k - \lambda_1)(k - \lambda_2)} + \cdots,$$

$$2\sigma x_2 x_4 = A_1 \cdot \alpha_4, \quad 2\sigma x_3 x_4 = \tfrac{1}{2} A_1 \cdot \alpha_3 \alpha_4, \quad \alpha_4 = A' - \tfrac{1}{4}\alpha_3^2,$$

$$\sigma(2x_2x_5 + 2x_3x_4) = A_1 A'', \quad A'' = -\frac{1}{(k - \lambda_1)(k - \lambda_2)(k - \lambda_3)},$$

$$2\sigma x_2 x_5 = A_1 \alpha_5, \quad 2\sigma x_3 x_5 = \tfrac{1}{2} A_1 \alpha_3 \alpha_5, \quad \alpha_5 = A'' - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A' + \tfrac{1}{8}\alpha_3^2.$$

Die zerfallende Kongruenz $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ mit den sich schneidenden Achsen dieser Komplexe als Leitgeraden, enthält

Linien, die allen Komplexen der konfokalen Schar gemeinsam sind, so dass sich von der Singularitätenfläche die Ebene und der Punkt, welche sie erfüllen, abspalten.

Die Leitlinie von $x_2 = 0$ ist wieder Doppelgerade der Fläche, die von $x_3 = 0$ gehört allen Komplexen an, obschon sie nicht auf der Fläche liegt. Durch jeden Punkt der Fläche läuft eine ihrer Geraden t, für die $\lambda_1 = \lambda_2 = k$ ist.

Eine Betrachtung der Werte, die sich hiefür ergeben:

$$2\,\sigma\,x_3\,x_5 = -\frac{1}{4\,(k-\lambda_3)} \quad \text{und} \quad \sigma\,x_4^2 = \frac{1}{4\,(k-\lambda_3)}$$

lässt ersehen, dass auch $\sigma\,x_5^2 = 0$ wird. Somit ordnet der Komplex $x_1 = \lambda_4\,x_2$, welcher als vierter involutorischer zu den anderen hinzutritt, dem Punkte, wo eine gegebene Gerade g die Fläche trifft, die Tangentialebene $g\,t$ zu, gleichwie im Falle 1.

Wir haben weiter die Rechnung:

$$2\,\sigma\,x_2\,x_6 = A_1 \cdot a_6, \quad a_6 = -\tfrac{1}{4}\,A'^2 - \tfrac{1}{2}\,a_3\,A'' + \tfrac{3}{8}\,a_3^2\,A' - \tfrac{5}{64}\,a_3^4 - \lambda_4^2$$

$$S^2\,(d\,x_i) = \sum_1^4{}^i\, M_i\,d\,\lambda_i^2$$

(z. B. wird hier $A_{14} = -\dfrac{2\,x_1^2}{(k-\lambda_1)\,\lambda_4} + \dfrac{4\,x_2\,x_6 \cdot \lambda_4}{(k-\lambda_1)\,a_6}$

$$= \frac{2}{k-\lambda_1} \cdot (-\lambda_4\,x_2^2 + \lambda_4\,x_2^2) = 0),$$

$$M_1 = \chi\,(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,\psi'}{(k-\lambda_1)^5}, \quad M_2 = \chi\,(\lambda_2), \quad M_3 = \chi\,(\lambda_3)$$

(χ ist wie immer der nach λ genommene Differentialquotient des unverkürzten φ),

$$M_4 = 4\,\frac{x_1^2}{\lambda_4^2} = 4\,(k-\lambda_1)\,(k-\lambda_2)\,(k-\lambda_3)\,\psi,$$

$$W = \sum_1^3{}^i \int \varphi_i\,d\,\lambda_i + 2\,\lambda_4 \cdot \sqrt{-(k-a)\,(k-b)} + C,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{(\lambda_i-a)\,(\lambda_i-b)}}{(k-\lambda_i)^3}.$$

IX. Kanonische Form [24].

Diese Form geht aus von den Gleichungen:

$$P = 2\,y_1\,y_2 + 2\,y_3\,y_6 + 2\,y_4\,y_5 = 0,$$

$$\Omega = 2\,k_1\,y_1\,y_2 + 2\,k_2\,y_3\,y_6 + 2\,k_2\,y_4\,y_5 - y_1^2 - 2\,y_3\,y_5 - y_4^2 = 0$$

und

$$\Omega' = 2\,k_1^2\,y_1\,y_2 + k_2^2\,(2\,y_3\,y_6 + 2\,y_4\,y_5) - 2\,k_1\,y_1^2 - 2\,k_2\cdot(2\,y_3\,y_5 + y_4^2) + 2\,y_3\,y_4 = 0.$$

Die y lassen sich wieder durch die Koordinaten der zugeordneten Linie x ausdrücken, wodurch die neuen Gleichungen entstehen:

$$P = \frac{2\,x_1\,x_2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{2\,x_1^2}{(k_1-\lambda)^3} + \frac{2\,x_3\,x_6 + 2\,x_4\,x_5}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{2\,(2\,x_3\,x_5 + x_4^2)}{(k_2-\lambda)^3} + \frac{3\cdot 2\,x_3\,x_4}{(k_2-\lambda)^4} + \frac{4\cdot x_3^2}{(k_2-\lambda)^5} = 0 = \chi,$$

$$\Omega - \lambda\cdot P = \frac{2\,x_1\,x_2}{k_1-\lambda} + \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{2\,x_3\,x_6 + 2\,x_4\,x_5}{k_2-\lambda} + \frac{2\,x_3\,x_5 + x_4^2}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{2\,x_3\,x_4}{(k_2-\lambda)^3} + \frac{x_3^2}{(k_2-\lambda)^4} = \varphi = 0,$$

$$\Omega' - 2\,\lambda\,\Omega + \lambda^2\cdot P = 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_3\,x_6 + 2\,x_4\,x_5 = 0 = J.$$

44. [24] **44.** Im ersten Falle [24] haben wir zu setzen:

$$\varphi = 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,(\lambda-\lambda_3)\,(\lambda-\lambda_4)\,\psi}{(k_1-\lambda)^2\,(k_2-\lambda)^4},$$

$$\sigma\,x_1^2 = \frac{(k_1-\lambda_1)\,..\,(k_1-\lambda_4)}{(k_2-k_1)^4} = A_1,$$

$$\sigma\,x_3^2 = \frac{(k_2-\lambda_1)\,..\,(k_2-\lambda_4)}{(k_1-k_2)^2} = A_2,$$

$$2\,\sigma\,x_1\,x_2 = -\frac{\partial A_1}{\partial k_1} = A_1\cdot a_2, \quad a_2 = -\left(\frac{1}{k_1-\lambda_1} + \cdots + \frac{4}{k_2-k_1}\right),$$

$$2\sigma x_3 x_4 = -\frac{\partial A_2}{\partial k_2} = A_2 \cdot \alpha_4, \quad \alpha_4 = -\left(\frac{1}{k_2-\lambda_1} + \cdots + \frac{2}{k_1-k_2}\right),$$

$$\sigma(2x_3x_5 + x_4^2) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 A_2}{\partial k_2^2} = A_2 \cdot A',$$

$$A' = \frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)} + \cdots 6 \cdots + \frac{2}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_2)} + \cdots + \frac{3}{(k_1-k_2)^2},$$

$$2\sigma x_3 x_5 = A_2 \cdot \alpha_5, \quad \alpha_5 = A' - \tfrac{1}{4}\alpha_4^2,$$

$$\sigma(2x_3x_6 + 2x_4x_5) = -\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 A_2}{\partial k_2^3} = A_2 A'',$$

$$A'' = -\left(\frac{1}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_2-\lambda_3)} + \cdots + \frac{2}{(k_2-\lambda_1)(k_2-\lambda_2)(k_1-k_2)}\right.$$
$$\left. + \cdots (6) \cdots + \frac{3}{(k_2-\lambda_1)(k_1-k_2)^2} + \cdots + \frac{4}{(k_1-k_2)^3}\right),$$

$$2\sigma x_3 x_6 = A_2 \alpha_6, \quad \alpha_6 = A'' - \tfrac{1}{2}\alpha_4\alpha_5 = A'' - \tfrac{1}{2}A'\alpha_4 + \tfrac{1}{8}\alpha_4^3.$$

Die Singularitätenfläche ist bei Weiler eingehend beschrieben; da die Geraden, welche die Achsen von $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ treffen, d. h. mit ihnen (je nach der Definition) durch einen Punkt oder in einer Ebene verlaufen, allen Komplexen angehören, ist klar, dass sich jener Punkt bezw. jene Ebene als selbständiges Gebilde von der Singularitätenfläche ablösen muss.

Die Differentialaufgabe erledigt sich wie folgt:

$$S^2(dx_i) = 4 \cdot (2\,dx_1\,dx_2 + 2\,dx_3\,dx_6 + 2\,dx_4\,dx_5)$$
$$= \sum_1^4{}^i M_i\,d\lambda_i^2, \quad M_i = \chi(\lambda_i),$$
$$\chi(\lambda_1) = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\psi}{(k_1-\lambda_1)^2(k_2-\lambda_1)^4};$$
$$W = \sum_1^4{}^i \int \varphi_i\,d\lambda_i,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{(\lambda_i-a)(\lambda_i-b)}}{(k_1-\lambda_i)(k_2-\lambda_i)^2}.$$

Mittels eines doppelten Grenzüberganges, wie er einzeln bei der zweiten und bei der fünften kanonischen Form zu machen ist, liesse sich auch dieses Resultat aus dem des allgemeinsten Falles herleiten.

45. [(24)] **45.** Das Schema des Falles [(24)] zieht die Gleichungsform nach sich:

$$\varphi = \frac{2\,x_1\,x_2 + 2\,x_3\,x_6 + 2\,x_4\,x_5}{k-\lambda} + \frac{x_1^2 + 2\,x_3\,x_5 + x_4^2}{(k-\lambda)^2} + \frac{2\,x_3\,x_4}{(k-\lambda)^3} + \frac{x_3^2}{(k-\lambda)^4} = 0$$

oder:

$$x_1^2 + 2\,x_3\,x_5 + x_4^2 + \frac{2\,x_3\,x_4}{k-\lambda} + \frac{x_3^2}{(k-\lambda)^2} = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\,\psi}{(k-\lambda)^2}.$$

$$\sigma\,x_3^2 = (k-\lambda_1)(k-\lambda_2) = A_1, \quad 2\,\sigma\,x_3\,x_4 = A_1 \cdot \alpha_4,$$

$$\alpha_4 = -\left(\frac{1}{k-\lambda_1} + \frac{1}{k-\lambda_2}\right).$$

Unter der Voraussetzung, dass $x_1 = p_{14}$, $x_2 = p_{23}$, $x_3 = p_{42}$, $x_4 = p_{34}$, $x_6 = p_{23}$ (Weiler A) bedeutet, lässt sich dieser Fall wieder als Degeneration von 13. [(11)(11)2] auffassen; bei der anderen Annahme, die Weiler im Unterfalle B macht, käme man zu dualen Betrachtungen. Die Singularitätenfläche jenes Falles hat sich als Fläche zweiter Ordnung zusammengezogen auf eine durch die Schnittlinien der Ebenen α und β gehende, doppelt zählende Ebene γ, als Klassenfläche auf einen Kegelschnitt in γ, der $\alpha\,\beta$ berührt; α, β und andrerseits der Berührungspunkt, doppelt gerechnet, vervollständigen die Fläche zur vierten Ordnung und Klasse. Wie dort ist die Singularitätenfläche, d. h. der Kegelschnitt, umhüllt von Ebenen, welche Punkte und Gerade mit einander verbinden, die durch eine Korrelation zwischen α und β konjugiert sind. Der Komplex und mit ihm die Korrelation ist erst festgelegt und zwar auf doppelte Art, sobald eine Gerade g des Komplexes gegeben ist. Ihrem

Schnittpunkt mit α entspricht dann in der Korrelation die Schnittlinie von β mit einer der Tangentialebenen durch g an den Kegelschnitt; zugleich ist so von den Komplexen im Verein mit $x_1 = \lambda_3 x_3$ eine Zuordnung von Punkt und Ebene aufgestellt ganz wie im Falle 40. Wieder wie bei den anderen Fällen, die in der Klammer zwei höhere Zahlen als 1 enthalten, ist $x_1 = \lambda_3 x_3$ der einzige involutorische Komplex, der sich angeben lässt, da er mit $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ speziell und daher zu sich selber involutorisch ist, und wieder ist weiterhin der Weg des Falles 23 einzuschlagen.

Bei der zu suchenden linearen Transformation müssen x_3, $2\,x_3\,x_4$, $x_1^2 + 2\,x_3\,x_5 + x_4^2$ sowie $x_1\,x_2 + x_3\,x_6 + x_4\,x_5$ in sich übergehen; mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten findet man:

$$x_3 = \eta_3, \qquad x_4 = \eta_4, \qquad x_1 = \eta_1 + \beta\,\eta_3,$$
$$x_5 = \eta_5 - \beta\,\eta_1 - \frac{\beta^2}{2}\,\eta_3, \qquad x_2 = \eta_2 + \beta\,\eta_4 + \varepsilon\,\eta_3,$$
$$x_6 = \eta_6 - \beta\,\eta_2 - \varepsilon\,\eta_1 - \frac{\beta^2}{2}\,\eta_4 - \beta\,\varepsilon\,\eta_3.$$

Bei n maliger Transformation kommt:

$$^n\xi_1 = \eta_1 + n\,\beta\,\eta_3,$$
$$^n\xi_2 = \eta_2 + n\,\beta\,\eta_4 + n\,\varepsilon\,\eta_3,$$
$$^n\xi_3 = \eta_3,$$
$$^n\xi_4 = \eta_4,$$
$$^n\xi_5 = \eta_5 - n\,\beta\,\eta_1 - \frac{n^2}{2}\,\beta^2\,\eta_3,$$
$$^n\xi_6 = \eta_6 - n\,\beta\,\eta_2 - n\,\varepsilon\,\eta_1 - \frac{n^2}{2}\,\beta^2\,\eta_4 - n^2\,\beta\,\varepsilon\,\eta_3.$$

Eine unendlich kleine Transformation und nachherige Integration liefern für die η die gleichen Ausdrücke wie für die $^n\xi$, nur dass rechts die Koordinaten einer festen Geraden η' eintreten.

Die Differentialgleichung des Schneidens reduziert sich wegen $d\eta_3 = d\eta_4 = 0$ auf

$$d\eta_1\, d\eta_2 = 0 = d n^2\, (\beta\, \eta_3\, (\beta\, \eta_4 + \varepsilon\, \eta_3))$$

oder

$$d n^2\, A_1 \left(\frac{\beta^2}{2}\, \alpha_4 + \beta\, \varepsilon\right) = 0,$$

ist also erfüllt für

$$\varepsilon = -\frac{\beta\, \alpha_4}{2}, \quad \alpha_4 = -\left(\frac{1}{k-\lambda_1} + \frac{1}{k-\lambda_2}\right).$$

So hat auch hier wieder die in Parameterform dargestellte Integralfläche die drei Konstanten λ_1, λ_2 und β.

X. Kanonische Form [33].

Der Ausgangspunkt ruht in den Gleichungen:

$$P = 2\, y_1\, y_3 + y_2^2 + 2\, y_4\, y_6 + y_5^2 = 0,$$

$$\Omega = k_1\, (2\, y_1\, y_3 + y_2^2) - 2\, y_1\, y_2 + k_2\, (2\, y_4\, y_6 + y_5^2) - 2\, y_4\, y_5 = 0,$$

$$\Omega' = k_1^2\, (2\, y_1\, y_3 + y_2^2) - 2\, k_1 \cdot 2\, y_1\, y_2 + y_1^2 + k_2^2\, (2\, y_4\, y_6 + y_5^2) - 2\, k_2 \cdot 2\, y_4\, y_5 + y_4^2 = 0,$$

welche zu den neuen Gleichungen führen:

$$P = \frac{2\, x_1\, x_3 + x_2^2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{2 \cdot 2\, x_1\, x_2}{(k_1-\lambda)^3} + \frac{3 \cdot x_1^2}{(k_1-\lambda)^4} + \frac{2\, x_4\, x_6 + x_5^2}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{2 \cdot 2\, x_4\, x_5}{(k_2-\lambda)^3} + \frac{3 \cdot x_4^2}{(k_2-\lambda)^4} = \chi = 0,$$

$$\Omega - \lambda\, P = \frac{2\, x_1\, x_3 + x_2^2}{k_1-\lambda} + \frac{2\, x_1\, x_2}{(k_1-\lambda)^2} + \frac{x_1^2}{(k_1-\lambda)^3} + \frac{2\, x_4\, x_6 + x_5^2}{k_2-\lambda} + \frac{2\, x_4\, x_5}{(k_2-\lambda)^2} + \frac{x_4^2}{(k_2-\lambda)^3} = \eta = 0,$$

$$\Omega' - 2\, \lambda\, \Omega + \lambda^2\, P = 2\, x_1\, x_3 + x_2^2 + 2\, x_4\, x_6 + x_5^2 = 0 = J.$$

46. Die Gattung [33] bietet in den Achsen von $x_1 = 0$ und $x_4 = 0$ zwei Rückkehrgeraden der Singularitätenfläche, welche bei Weiler beschrieben ist. Die Ergebnisse von [1113] wiederholen sich hier in doppelter Anwendung. Die Rechnungen lauten: 46. [33]

$$\varphi = 0 = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)\,\psi}{(k_1 - \lambda)^3 (k_2 - \lambda)^3},$$

$$\sigma x_1^2 = A_1, \qquad \sigma x_4^2 = A_2,$$

$$A_i = \frac{(k_i - \lambda_1) \ldots (k_i - \lambda_4)}{(k_j - k_i)^3},$$

$$2\sigma x_1 x_2 = A_1 \alpha_1, \qquad 2 x_4 x_5 = A_2 \alpha_2,$$

$$2\sigma x_1 x_3 + \sigma x_2^2 = A_1 \cdot B_1, \qquad 2\sigma x_4 x_6 + \sigma x_5^2 = A_2 \cdot B_2,$$

$$\alpha_i = -\left(\frac{1}{k_i - \lambda_1} + \cdots + \frac{3}{k_j - k_i}\right),$$

$$B_i = \frac{1}{(k_i - \lambda_1)(k_i - \lambda_2)} + \cdots 6 \cdots + \frac{3}{(k_i - \lambda_1)(k_j - k_i)} + \cdots + \frac{6}{(k_j - k_i)^2},$$

$$2\sigma x_1 x_3 = A_1 \beta_1, \qquad 2\sigma x_4 x_6 = A_2 \beta_2,$$

$$\beta_i = B_i - \tfrac{1}{4}\alpha_i^2, \qquad i \neq j = 1, 2.$$

$$S^2(dx_i) = 4(2\,dx_1\,dx_3 + dx_2^2 + 2\,dx_4\,dx_6 + dx_5^2) = \sum_1^4{}^i M_i\,d\lambda_i^2,$$

$$M_i = \chi(\lambda_i), \qquad M_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)\,\psi}{(k_1 - \lambda_1)^3 (k_2 - \lambda_1)^3},$$

$$W = \sum_1^4{}^i \int \varphi_i\,d\lambda_i + C,$$

wo $$\varphi_i = \frac{1}{(k_1 - \lambda_i)(k_2 - \lambda_i)} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)}{(k_1 - \lambda_i)(k_2 - \lambda_i)}}.$$

47. Der Spezialfall [(33)] gibt: 47. [(33)]

$$\varphi = \frac{2 x_1 x_3 + x_2^2 + 2 x_4 x_6 + x_5^2}{k - \lambda} + \frac{2 x_1 x_2 + 2 x_4 x_5}{(k - \lambda)^2} + \frac{x_1^2 + x_4^2}{(k - \lambda)^3}$$

$$= 0 = \frac{(\lambda - \lambda_1)\,\psi}{(k - \lambda)^3}$$

oder

$$2\,x_1\,x_2 + 2\,x_4\,x_5 + \frac{x_1^2 + x_4^2}{k-\lambda} = 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)\,\psi}{k-\lambda}.$$

Die ganze zerfallende Kongruenz $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ gehört allen Komplexen an und besteht aus den Geraden der dreifachen Ebene und des dreifachen Punktes: $x_2 = 0$, $x_5 = 0$ bestimmen mit $x_1 + i\,x_4 = 0$ bezw. $x_1 - i\,x_4 = 0$ je einen Büschel von Geraden in der einfachen Ebene oder durch den einfachen Punkt (ausserdem noch doppelt den Büschel durch den dreifachen Punkt in der dreifachen Ebene). Man erkennt so deutlich den Zerfall des Tetraedralkomplexes, der hier stattfindet. Die Komplexkegelschnitte einer beliebigen Ebene berühren sich an der Schnittlinie mit der dreifachen Ebene gegenseitig dreipunktig und haben als vierte gemeinsame Tangente die Schnittgerade mit der einfachen Ebene.

Da $x_1 = 0$ und $x_4 = 0$ spezielle Komplexe sind, ist es wieder nicht möglich, ausser $x_1 = \lambda_2\,x_4$ noch einen weiteren involutorischen Komplex einzuführen.

Zur Bestimmung der Integralflächen setzen wir:

$$\xi_1 = x_1 + i\,x_4, \qquad \xi_2 = x_2 + i\,x_5, \qquad \xi_3 = x_3 + i\,x_6,$$
$$\xi_4 = x_1 - i\,x_4, \qquad \xi_5 = x_2 - i\,x_5, \qquad \xi_6 = x_3 - i\,x_6$$

und erhalten die Umformungen:

$$J = \xi_1\,\xi_6 + \xi_3\,\xi_4 + \xi_2\,\xi_5.$$
$$x_1^2 + x_4^2 = \xi_1\,\xi_4, \qquad 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_4\,x_5 = \xi_1\,\xi_5 + \xi_2\,\xi_4.$$

Diese Ausdrücke gehen durch die folgende lineare Transformation in sich über:

$$\xi_1 = \alpha\,\eta_1, \qquad \xi_4 = \beta\,\eta_4,$$
$$\xi_2 = \alpha\,\eta_2 + \gamma\,\eta_1, \qquad \xi_5 = \beta\,\eta_5 + \delta\,\eta_4,$$
$$\xi_3 = \alpha\,\eta_3 - \alpha^2\,\delta\,\eta_2 + \varepsilon\,\eta_1, \qquad \xi_6 = \beta\,\eta_6 - \beta^2\,\gamma\,\eta_5 + \iota\,\eta_4,$$
$$\alpha\,\beta = 1, \qquad \alpha\,\delta + \beta\,\gamma = 0, \qquad \iota\,\alpha + \varepsilon\,\beta + \gamma\,\delta = 0.$$

Die n malige Wiederholung gibt:

$$^n\xi_1 = \alpha^n \eta_1,$$
$$^n\xi_2 = \alpha^n \eta_2 + n\,\alpha^{n-1}\gamma\,\eta_1,$$
$$^n\xi_3 = \alpha^n \eta_3 - n\cdot\alpha^{n+1}\delta\,\eta_2 + \left(n\,\alpha^{n-1}\varepsilon - \frac{n(n-1)}{2}\alpha^n\gamma\,\delta\right)\eta_1,$$

u. s. f.; die Werte für die letzten drei Koordinaten entstehen, wenn man in den ersten drei α mit β, γ mit δ, ε mit ι und die Indizes 1, 2, 3 mit 4, 5, 6 vertauscht.

Denkt man n stetig veränderlich und unendlich klein, so erhält man

$$d\,\eta_1 = \eta_1 \lg\alpha\, d\,n,$$
$$d\,\eta_2 = \eta_2 \lg\alpha\, d\,n + \gamma\,\beta\,\eta_1\, d\,n,$$
$$d\,\eta_3 = \eta_3 \lg\alpha\, d\,n + (\tfrac{1}{2}\gamma\,\delta + \varepsilon\,\beta)\,\eta_1\, d\,n - \alpha\,\delta\,\eta_2\, d\,n, \text{ u. s. f.}$$

Integriert man, so gibt es genau die gleichen Terme wie für $^n\xi$, nur dass auf der rechten Seite die Koordinaten einer festen, zum Ausgang genommenen Geraden stehen.

Die Differentialgleichung für das Schneiden konsekutiver Geraden:

$$d\,\eta_1\, d\,\eta_6 + d\,\eta_2\, d\,\eta_5 + d\,\eta_3\, d\,\eta_4 = 0$$
$$= d\,n^2\,\{(\eta_1\,\eta_6 + \eta_2\,\eta_5 + \eta_3\,\eta_4)\lg\alpha\lg\beta + \beta\,\gamma\lg\beta$$
$$\cdot(2\,\eta_2\,\eta_4 + 2\,\eta_1\,\eta_5) + [\lg\beta\,(\gamma\,\delta + 2\,\varepsilon\,\beta) + \gamma\,\delta]\,\eta_1\,\eta_4\}$$

ist erfüllt, sobald ε gemäss der Bedingung

$$\frac{\lg\beta\cdot(\gamma\,\delta + 2\,\varepsilon\,\beta) + \gamma\,\delta}{2\,\beta\,\gamma\lg\beta} = \frac{1}{k - \lambda_1}$$

gewählt wird; da auch $\alpha\,\delta + \beta\,\gamma = 0$, also $\delta = -\beta^2\gamma$ oben festgesetzt ist, enthält die Parameterform für die Geraden der Integralfläche in β, γ und λ_1 drei Konstante wie immer. —

XI. Kanonische Form [6].

Die letzte kanonische Form stützt sich auf die Gleichungen:

$$P = 0 = 2\,y_1\,y_6 + 2\,y_2\,y_5 + 2\,y_3\,y_4,$$

$$\Omega = 0 = 2\,k\,(y_1\,y_6 + y_2\,y_5 + y_3\,y_4) - 2\,y_1\,y_5 - 2\,y_2\,y_4 - y_3^2,$$

$$\Omega' = 0 = 2\,k^2\,(y_1 y_6 + y_2\,y_5 + y_3\,y_4) - 2\,k\,(2\,y_1\,y_5 + 2\,y_2\,y_4 + y_3^2) + 2\,y_1\,y_4 + 2\,y_2\,y_3.$$

Die Koordinaten y einer beliebigen singulären Geraden seien wieder durch diejenigen der zugeordneten Linie x dargestellt:

$$y_m = \sum_1^m{}_l \frac{\varrho\, x_l}{(k-\lambda)^{m+1-l}};$$

so entspringen die drei neuen Gleichungen, denen die singulären Linien des Komplexes λ genügen:

$$P = 0 = \frac{2\,x_1\,x_6 + 2\,x_2\,x_5 + 2\,x_3\,x_4}{(k-\lambda)^2} + \frac{2\cdot(2\,x_1\,x_5 + 2\,x_2\,x_4 + x_3^2)}{(k-\lambda)^3}$$

$$+ \frac{3\cdot(2\,x_1 x_4 + 2\,x_2 x_3)}{(k-\lambda)^4} + \frac{4\,(2\,x_1 x_3 + x_2^2)}{(k-\lambda)^5} + \frac{5\cdot 2\,x_1 x_2}{(k-\lambda)^6} + \frac{6\cdot x_1^2}{(k-\lambda)^7} = \chi(\lambda),$$

$$\Omega - \lambda\,P = 0 = \frac{2\,x_1\,x_6 + 2\,x_2\,x_5 + 2\,x_3\,x_4}{k-\lambda} + \frac{2\,x_1\,x_5 + 2\,x_2\,x_4 + x_3^2}{(k-\lambda)^2}$$

$$+ \frac{2\,x_1\,x_4 + 2\,x_2\,x_3}{(k-\lambda)^3} + \frac{2\,x_1\,x_3 + x_2^2}{(k-\lambda)^4} + \frac{2\,x_1\,x_2}{(k-\lambda)^5} + \frac{x_1^2}{(k-\lambda)^6} = \varphi,$$

$$\Omega' - 2\,\lambda\cdot\Omega + \lambda^2\,P = 0 = 2\,x_1\,x_6 + 2\,x_2\,x_5 + 2\,x_3\,x_4 = J.$$

48. [6] **48.** In Fall [6] nehmen wir:

$$\varphi = 0 = \frac{(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,(\lambda-\lambda_3)\,(\lambda-\lambda_4)\,\psi}{(k-\lambda)^6}$$

oder vermöge der Identität $J = 0$:

$$2x_1x_5 + 2x_2x_4 + x_3^2 + \frac{2x_1x_4 + 2x_2x_3}{k-\lambda} + \frac{2x_1x_3 + x_2^2}{(k-\lambda)^2}$$

$$+ \frac{2x_1x_2}{(k-\lambda)^3} + \frac{x_1^2}{(k-\lambda)^4} = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)\psi}{(k-\lambda)^4},$$

$$\sigma x_1^2 = (k-\lambda_1)(k-\lambda_2)(k-\lambda_3)(k-\lambda_4) = A_1,$$

$$\sigma x_i^2 = \tfrac{1}{4} A_1 \cdot a_i^2, \quad i = 2, 3 \cdots 6;$$

$$2\sigma x_1x_2 = -\frac{\partial A_1}{\partial k_1} = A_1 a_2, \quad a_2 = -\left(\frac{1}{k-\lambda_1} + \cdots\right),$$

$$\sigma(2x_1x_3 + x_2^2) = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial k^2} = A_1 \cdot A',$$

$$A' = \frac{1}{(k-\lambda_1)(k-\lambda_2)} + \cdots 6 \cdots, \qquad a_3 = A' - \tfrac{1}{4}a_2^2,$$

$$\sigma(2x_1x_4 + 2x_2x_3) = -\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 A_1}{\partial k^3} = A_1 \cdot A'',$$

$$A'' = -\left(\frac{1}{(k-\lambda_1)(k-\lambda_2)(k-\lambda_3)} + \cdots\right),$$

$$a_4 = A'' - \tfrac{1}{2}a_2a_3 = A'' - \tfrac{1}{2}a_2A' + \tfrac{1}{8}a_2^3,$$

$$\sigma(2x_1x_5 + 2x_2x_4 + x_3^2) = \frac{1}{4!}\cdot\frac{\partial^4 A_1}{\partial k^4} = 1 = A_1 \cdot A''',$$

$$A''' = \frac{1}{(k-\lambda_1)(k-\lambda_2)(k-\lambda_3)(k-\lambda_4)},$$

$$a_5 = A''' - \tfrac{1}{2}a_2A'' + \tfrac{3}{8}a_2^2A' - \tfrac{5}{64}a_2^4 - \tfrac{1}{4}A'^2,$$

$$\sigma(2x_1x_6 + 2x_2x_5 + 2x_3x_4) = 0,$$

$$a_6 = -\tfrac{1}{2}a_2a_5 - \tfrac{1}{2}a_3a_4 = -\tfrac{1}{2}a_2A''' + \tfrac{3}{8}a_2^2A'' - \tfrac{5}{16}a_2^3A'$$
$$+ \tfrac{7}{128}a_2^5 - \tfrac{1}{2}A'A'' + \tfrac{3}{8}a_2A'^2.$$

Die Form von φ lässt erkennen, dass die den drei speziellen Komplexen mit sich schneidenden Achsen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ angehörigen Geraden, die je nach der Definition der Koordinaten eine Ebene oder einen Punkt erfüllen, Veranlassung geben zur Abspaltung dieses Gebildes von der Singularitätenfläche, welche im einzelnen von Weiler berechnet und beschrieben ist.

Bemerkenswert ist, dass durch diesen Komplex keine Gruppierung von Geraden, die der Singularitätenfläche gegenüber gleiche Lage haben, mehr gegeben wird, weil das Vorzeichen von x_1 sämtliche andere Koordinaten mit bestimmten Zeichen versieht, sobald die vier λ gegeben sind.

Die Differentiation liefert nach einigen Umformungen folgende Ausdrücke:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{d x_1}{x_1} = -\sum_1^4{}^i \frac{d\lambda_i}{k-\lambda_i},$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{d x_2}{x_2} = -\sum_1^4{}^i \left(\frac{d\lambda_i}{k-\lambda_i} + \frac{d\lambda_i}{(k-\lambda_i)^2}\cdot\frac{2}{\alpha_2}\right),$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{d x_3}{x_3} = -\sum_1^4{}^i \left(\frac{d\lambda_i}{k-\lambda_i} + \frac{d\lambda_i}{(k-\lambda_i)^2}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{d\lambda_i}{(k-\lambda_i)^3}\cdot\frac{2}{\alpha_3}\right),\cdots$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + 2\frac{d x_6}{x_6} = -\sum_1^4{}^i \left(\frac{d\lambda_i}{k-\lambda_i} + \frac{d\lambda_i}{(k-\lambda_i)^2}\cdot\frac{\alpha_5}{\alpha_6} + \frac{d\lambda_i}{(k-\lambda_i)^3}\cdot\frac{\alpha_4}{\alpha_6}\right.$$
$$\left. + \frac{d\lambda_i}{(k-\lambda_i)^4}\cdot\frac{\alpha_3}{\alpha_6} + \frac{d\lambda_i}{(k-\lambda_i)^5}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_6} + \frac{d\lambda_i}{(k-\lambda_i)^6}\cdot\frac{2}{\alpha_6}\right).$$

Im letzten Gliede musste noch die aus $\varphi(\lambda_i) = 0$ folgende Beziehung

$$\frac{A'''}{(k-\lambda_i)^2} + \frac{A''}{(k-\lambda_i)^3} + \frac{A'}{(k-\lambda_i)^4} + \frac{\alpha_2}{(k-\lambda_i)^5} = -\frac{1}{(k-\lambda_i)^6}$$

angewandt werden, da sich $d\alpha_6$ nicht wie bei den anderen Termen die Differentiale $d\alpha$ durch die α mit niedrigeren Indizes und $d\lambda_i$ restlos ausdrücken liess.

Es wird so die Differentialgleichung

$$S^2(dx_i) = 4\cdot(2\,dx_1\,dx_6 + 2\,dx_2\,dx_5 + 2\,dx_3\,dx_4)$$
$$= \sum_1^4{}^i M_i\,d\lambda_i^2 + \sum_1^4{}^{ij} 2\,A_{ij}\,d\lambda_i\,d\lambda_j;$$

es berechnet sich:

$$M_i = \frac{1}{i^2} \cdot J$$

$$+ \frac{1}{i^3} \cdot \left(2 x_1 x_6 \cdot \frac{a_5}{a_6} + 2 x_2 x_5 \cdot \frac{a_4}{a_5} + 2 x_2 x_5 \cdot \frac{2}{a_2} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{a_3}{a_4} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{a_2}{a_3} \right)$$

$$+ \frac{1}{i^4} \cdot \left(2 x_1 x_6 \cdot \frac{a_4}{a_6} + 2 x_2 x_5 \cdot \frac{a_3}{a_5} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{a_2}{a_4} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{2}{a_3} \right.$$
$$\left. + 2 x_2 x_5 \cdot \frac{2 a_4}{a_2 a_5} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{a_2 a_3}{a_3 a_4} \right)$$

$$+ \frac{1}{i^5} \cdot \left(2 x_1 x_6 \cdot \frac{a_3}{a_6} + 2 x_2 x_5 \cdot \frac{a_2}{a_5} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{2}{a_4} \right.$$
$$\left. + 2 x_2 x_5 \cdot \frac{2 a_3}{a_2 a_5} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{a_2^2}{a_3 a_4} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{2 a_3}{a_3 a_4} \right)$$

$$+ \frac{1}{i^6} \cdot \left(2 x_1 x_6 \cdot \frac{a_2}{a_6} + 2 x_2 x_5 \cdot \frac{2}{a_5} \right.$$
$$\left. + 2 x_2 x_5 \cdot \frac{2 a_2}{a_2 a_5} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{2 a_2}{a_3 a_4} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{2 a_2}{a_3 a_4} \right)$$

$$+ \frac{1}{i^7} \cdot \left(2 x_1 x_6 \cdot \frac{2}{a_6} + 2 x_2 x_5 \cdot \frac{4}{a_2 a_5} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{4}{a_3 a_4} \right)$$

$$= \frac{1}{i^2} \cdot J + \frac{2}{i^3} \cdot (2 x_1 x_5 + 2 x_2 x_4 + x_3^2) + \frac{3}{i^4} \cdot (2 x_1 x_4 + 2 x_2 x_3)$$

$$+ \frac{4}{i^5} \cdot (2 x_1 x_3 + x_2^2) + \frac{5}{i^6} \cdot 2 x_1 x_2 + \frac{6}{i^7} \cdot x_1^2 = \chi (\lambda_i);$$

$$A_{ij} = \frac{1}{ij} \cdot J$$

$$+ \frac{i+j}{i^2 \cdot j^2} \left(x_1 x_6 \cdot \frac{a_5}{a_6} + x_2 x_5 \cdot \frac{a_4}{a_5} + x_2 x_5 \cdot \frac{2}{a_2} + x_3 x_4 \cdot \frac{a_3}{a_4} + x_3 x_4 \cdot \frac{a_2}{a_3} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{i^2 \cdot j^2} \cdot (2 x_2 x_5 \cdot \frac{2 a_4}{a_2 a_5} + 2 x_3 x_4 \cdot \frac{a_2 a_3}{a_3 a_4} \right)$$
$$\left. + \frac{i^2 + j^2}{i^3 \cdot j^3} \left(x_1 x_6 \cdot \frac{a_4}{a_6} + x_2 x_5 \cdot \frac{a_3}{a_5} + x_3 x_4 \cdot \frac{a_2}{a_4} + x_3 x_4 \cdot \frac{2}{a_3} \right) \right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{i+j}{i^3\cdot j^3}\left(x_2x_5\cdot\dfrac{2\,a_3}{a_2\,a_5}+x_3x_4\cdot\dfrac{a_2^2}{a_3\,a_4}+x_3x_4\cdot\dfrac{2\,a_3}{a_3\,a_4}\right)\\ +\dfrac{i^3+j^3}{i^4\cdot j^4}\left(x_1x_6\cdot\dfrac{a_3}{a_6}+x_2x_5\cdot\dfrac{a_2}{a_5}+x_3x_4\cdot\dfrac{2}{a_4}\right)\end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{i^3\cdot j^3}\cdot 2\,x_3x_4\cdot\dfrac{2\,a_2}{a_3\,a_4}\\ +\dfrac{i^2+j^2}{i^4\cdot j^4}\left(x_2x_5\cdot\dfrac{2\,a_2}{a_2\,a_5}+x_3x_4\cdot\dfrac{2\,a_2}{a_3\,a_4}\right)\\ +\dfrac{i^4+j^4}{i^5\cdot j^5}\left(x_1x_6\cdot\dfrac{a_2}{a_6}+x_2x_5\cdot\dfrac{2}{a_5}\right)\end{array}\right.$$

$$\frac{i+j}{i^4\cdot j^4}x_3x_4\cdot\frac{4}{a_3\,a_4}+\frac{i^3+j^3}{i^5\cdot j^5}x_2x_5\cdot\frac{4}{a_2\,a_5}+\frac{i^5+j^5}{i^6\cdot j^6}x_1x_6\cdot\frac{2}{a_6}$$

$$=\frac{1}{ij}\cdot J+\frac{i+j}{i^2\cdot j^2}(2x_1x_5+2x_2x_4+x_3^2)+\frac{i^2+ij+j^2}{i^3\cdot j^3}(2x_1x_4+2x_2x_3)$$

$$+\frac{i^3+i^2j+ij^2+j^3}{i^4\cdot j^4}(2x_1x_3+x_2^2)+\frac{i^4+i^3j+\cdots+j^4}{i^5\cdot j^5}2x_1x_2$$

$$+\frac{i^5+i^4j+\cdots+j^5}{i^6\cdot j^6}x_1^2=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\cdot(\varphi(\lambda_i)-\varphi(\lambda_j))=0.$$

Hiebei ist in M_i und A_{ij} symbolisch i und j statt $k-\lambda_i$ bezw. $k-\lambda_j$ gesetzt.

Ferner ist die Relation benützt, welche sich aus der Einführung der a ergibt:

$$2:a_2:a_3:a_4:a_5:a_6=x_1:x_2:x_3:x_4:x_5:x_6.$$

Man bemerkt, wie A_{ij} in M_i übergeht für $i=j$.

Es reduziert sich somit wieder die Differentialgleichung auf:

$$S^2(d\,x_i)=\sum_1^4{}^i M_i\,d\,\lambda_i^2,$$

$$M_i=\chi(\lambda_i),\quad \chi(\lambda_1)=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)\,\psi}{(k-\lambda_1)^6},$$

und das Integral wird:

$$W = \sum_1^4{}^i \int \varphi_i \, d\lambda_i + C,$$

wo

$$\varphi_i = \frac{\sqrt{(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)}}{(k - \lambda_i)^3}.$$

Die Ableitung aus dem allgemeinen Komplexfall mit den Gleichungen:

$$\sum_1^6{}^i a_i x_i^2 = 0, \quad \sum_1^6{}^i \frac{a_i x_i^2}{k_i - \lambda} = 0$$

kann durch folgende Substitutionen geschehen:

$x_2 \sim x_1 + \varepsilon_2 x_2, \quad x_3 \sim x_1 + \varepsilon_3 x_2 + \eta_3 x_3,$
$x_4 \sim x_1 + \varepsilon_4 x_2 + \eta_4 x_3 + \zeta_4 x_4, \quad x_5 \sim x_1 + \varepsilon_5 x_2 + \eta_5 x_3 + \zeta_5 x_4 + \vartheta_5 x_5,$
$x_6 \sim x_1 + \varepsilon_6 x_2 + \eta_6 x_3 + \zeta_6 x_4 + \vartheta_6 x_5 + \iota_6 x_6, \quad k_i = k - \varepsilon_i.$

Hiebei sollen die ε unendlich klein von der 1. Ordnung, die η von der 2., die ζ von der 3., die ϑ von der 4. und ι_6 von der 5. Ordnung sein, und das unendlich Kleine von der 6. Ordnung an soll vernachlässigt werden; ferner sei

$$\begin{aligned}
&\Sigma a_i = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i^2 = 0,\\
&\Sigma a_i \varepsilon_i^3 = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i^4 = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i^5 = 1,\\
&\Sigma a_i \varepsilon_i \eta_i = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i^2 \eta_i = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i^3 \eta_i = 1,\\
&\Sigma a_i \eta_i = 0, \quad \Sigma a_i \eta_i^2 = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i \eta_i^2 = 1,\\
&\Sigma a_i \zeta = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i \zeta = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i^2 \zeta = 1,\\
&\Sigma a_i \eta \zeta = 1, \quad \Sigma a_i \vartheta_i = 0, \quad \Sigma a_i \varepsilon_i \vartheta_i = 1,
\end{aligned}$$

$a_6 \iota_6 = 1$, wo sich die Summen über alle vorhandenen Grössen der betreffenden Art erstrecken.

Da 19 Gleichungen für die 21 Grössen a, ε, η, ϑ, ζ, ι bestehen, ist deren Annahme noch möglich; es gehen dadurch J, φ und χ in die neuen Formen über, so dass auch die Resultate bezüglich der Differentialgleichung und der Integralfläche anwendbar bleiben.

Vita.

Geboren am 9. August 1876 als Sohn des verstorbenen Apothekers Lothar Tempel zu Baiersdorf bei Erlangen, besuchte ich die dortige Volksschule, hierauf das Gymnasium zu Erlangen und das Maximiliansgymnasium in München, wo ich im Jahre 1894 absolvierte. In den folgenden vier Jahren oblag ich an der Universität und der Technischen Hochschule in München mathematisch-physikalischen und allgemein philosophischen Studien. Allen meinen verehrten Lehrern an beiden Hochschulen spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aus; besonders fühle ich mich für die Förderung im mathematischen Wissen verpflichtet den Herren Geheimrat Dr. Gustav Bauer und Universitätsprofessor Dr. Ferdinand Lindemann.

Nach bestandenem Lehramtsexamen wurde ich 1899 zum Gymnasialassistenten in München und 1900 zum K. Reallehrer in Ingolstadt befördert.